Die elementare Arithmetik

in

ihrer wissenschaftlichen Begründung

und

praktischen Anwendung.

Von

B. J. Clasen,

Religionslehrer an der k. g.-h. Normalschule in Luxemburg.

Genehmigt von der k. g.-h. Unterrichtscommission.

Luxemburg.
Druck und Verlag von Peter Brück.
1865.

Die elementare Arithmetik.

Die

elementare Arithmetik

in

ihrer wissenschaftlichen Begründung

und

praktischen Anwendung.

Von

B. J. Clasen, K

Religionslehrer an der k. g.-h. Normalschule in Luxemburg.

Genehmigt von der k. g.-h. Unterrichtscommission.

Luxemburg.
Druck und Verlag von Peter Brück.
1865.

Vorwort.

Dieses Handbuch ist für die obern Klassen besserer Primärschulen, für Bürgerschulen und für die untern Klassen mittlerer Lehranstalten berechnet. Die Grundsätze, von welchen ich mich bei der Abfassung desselben leiten ließ, sind im Wesentlichen folgende:

In Betreff der Ordnung, in welcher die verschiedenen Lehrsätze auf einander folgen, und der Weise, wie die einen aus den andern hergeleitet werden, suchte ich den geradesten und unmittelbarsten Weg einzuschlagen. Darum mußte die Theorie der Dezimalen, welche nur eine Erweiterung der Theorie der ganzen Zahlen ist, vor den Brüchen dargestellt werden; und da die Principien dieses directen Lehrganges allgemein sind, so konnte auch die Lehre von den ganzen Zahlen, Dezimalen und Brüchen symmetrisch auf drei parallelen Wegen entwickelt werden. Auf Umwegen können mitunter Schwierigkeiten umgangen werden. Das Licht verbreitet sich aber nur auf geradem Wege.

Uebrigens rühren die Schwierigkeiten in allen mathematischen Wissenschaften größtentheils daher, daß neue Zahlenverhältnisse, neue Definitionen oder neue Notationen, so einfach sie sein mögen, erst vollständig und exact aufgefaßt werden, nachdem einige Uebung mit denselben vertraut gemacht hat. Statt langer und langweiliger Auseinandersetzungen wurden darum fast alle Nummern des theoretischen Theiles von entsprechenden Uebungen begleitet, welche ich am Ende eines jeden Kapitels zusammengestellt habe. Der Lehrer möge dieselben mit seinen Schülern vornehmen, eho er weiter schreitet. Diese Uebungen sollen ferner das Verständniß später folgender Lehrsätze anbahnen. (z. B. S. 10, Aufg. 38 u. ff. — S. 14. Aufg. 15 u. ff.) Mit Hülfe dieser späteren Theorieen ließen sich solche Aufgaben leichter lösen; doch gestatte man auch bei Wiederholungen derartige Lösungen nicht. Wird aber der Schüler von selbst auf die Folgerung

geführt, welche durch den späteren Lehrsatz entwickelt werden soll, so hat die Aufgabe ihren Zweck vollkommen erreicht. Dieser doppelte Zweck erklärt auch die Aufnahme mancher Probleme, welche sonst als zu leicht oder zu wenig interessant erscheinen dürften.

Daß trotzdem die Darstellung mancher Theorie den meisten Anfängern Schwierigkeiten bieten mag, soll zugegeben werden. Solche Theorieen könnten ausgelassen werden. Die Schwierigkeiten würden alsdann wohl verschwinden; sie wären aber nicht überwunden, und es scheint mir ein größerer Mißstand zu sein, wenn sie auf diese Weise verborgen, als wenn sie einfach überschlagen werden. Darum wurde die Theorie der Brüche unabhängig von der Theorie der gemeinschaftlichen Maße zc. dargestellt, und diese nach jener eingereiht.

Bei Abfassung der Aufgaben wurde außer der Einübung der Theorie auch auf deren Anwendung im praktischen Leben, im Ackerbauwesen und insbesondere im kaufmännischen Verkehr Bezug genommen. Von dem einen oder andern Problem, das größere Schwierigkeiten bietet oder für manchen Schüler weniger nützlich und interessant sein möchte, glaubte ich um so weniger Abstand nehmen zu müssen, als es jedem intelligenten Lehrer leicht sein wird, sich aus der reichen Fülle des Stoffes das für seinen Zweck und seine Schüler Passende auszuwählen.

Ich kann nicht umhin, bei dieser Gelegenheit Herrn Eugen Fischer, Präsidenten der Ackerbau-Commission, welcher mir bei der Auswahl der auf den Ackerbau bezüglichen Aufgaben behülflich war, meinen aufrichtigen Dank abzustatten.

Möge dieses Lehrbuch dazu beitragen, in den jugendlichen Gemüthern Liebe und Lust für eine Wissenschaft zu wecken, welche in so hohem Grade geeignet ist, das Denkvermögen auszubilden und zu schärfen!

Luxemburg, den 19. Februar 1865.

Der Verfasser.

Berichtigungen.

Seite 23. Nr. 26. Eine von den Zeilen 1+1+1+1+1+1+1 ist zu streichen.

Seite 84. Aufg. 9. Man lese: „250 holl. Florin machen ungefähr 528 Franken.“

Seite 90. Zeile 8. Statt „Schiffslast“ lese man „Schiffstonne.“ Eine Schiffslast Zollvereinsgew. = 2000 Kilogr.

Seite 182. Zeile 6 von unten. Statt „300“ lese man „350.“

Seite 215. Zeile 10 von unten. Statt „verleihen“ lese man „vertheilen.“

Einleitung.

1. Die **Mathematik** ist die Wissenschaft der Größen.

2. **Größe** nennt man Alles, was vermehrt oder vermindert, gezählt oder gemessen werden kann,[1]) z. B. die Länge, Breite einer Sache, der Werth eines Gegenstandes, eine Summe Geldes, eine gewisse Zeitdauer, eine bestimmte Menge Menschen.

3. Eine unbekannte Größe kann nicht anders bestimmt werden, als durch Vergleich mit einer andern Größe, die bekannt ist oder als bekannt vorausgesetzt wird, und welche in diesem Falle **Einheit** heißt. An und für sich ist die Einheit willkürlich, d. h. man kann die zu bezeichnende Größe mit jeder andern willkürlich gewählten Größe derselben Art vergleichen. Bei der Bestimmung mancher Größen ist aber eine Einheit oder Vergleichsgröße vorzugsweise durch die Umstände empfohlen, oder durch allgemeinen Gebrauch eingeführt oder sogar durch das Gesetz vorgeschrieben; wie z. B. bei der Bestimmung einer Menge Menschen, einer Zeitdauer oder eines Längenmaßes die einzelne Person, die Stunde, der Meter.

[1]) Eine Erklärung des Begriffes von Größe, aber keine Definition, da die Ausdrücke vermehren, vermindern u. s. w. den Begriff von Größe voraussetzen. Größe ist dasjenige, wodurch gleichartige Gegenstände sich unterscheiden.

4. Derjenige Ausdruck, welcher das Ergebniß (Resultat) dieses Vergleiches angibt, d. h. welcher bezeichnet, wie sich die zu bestimmende Größe zur Einheit verhält, heißt **Zahl.**

5. Die **Arithmetik** ist die Wissenschaft der Zahlen.

Die ganzen Zahlen.

Numeration der ganzen Zahlen.

6. Die erste Aufgabe der Arithmetik besteht darin, Größen zu zählen oder zu messen, d. h. mit der Einheit zu vergleichen und den schriftlichen und mündlichen Ausdruck der Zahlen, welche das Resultat dieses Vergleiches bezeichnen, festzustellen. Der Theil der Arithmetik, welcher dieses lehrt, heißt die **Numeration.**

7. Eine Größe, die eben so groß ist, als die Einheit heißt 1 oder eine Einheit.

Eine Größe, die so groß ist als 1 Einheit und noch 1 Einheit, heißt 2 oder zwei Einheiten.

Eine Gr., d. s. gr. ist als	2	Einh. u. noch	1	Einh. h.	3 od. drei Einh.
—	—	3	—	1	—	4 od. vier Einh.
—	—	4	—	1	—	5 od. fünf Einh.
—	—	5	—	1	—	6 od. sechs Einh.
—	—	6	—	1	—	7 od. sieben E.
—	—	7	—	1	—	8 od. acht Einh.
—	—	8	—	1	—	9 od. neun Einh.
—	—	9	—	1	—	zehn Einheiten.

8. Alle diese Zahlen und alle andere, welche entstehen, wenn man in ähnlicher Weise immer eine Einheit zu der vorhergehenden hinzufügt, heißen ganze Zahlen.

1 ist also die kleinste ganze Zahl, aber darum keineswegs die kleinste Zahl, denn es gibt viele Größen, die kleiner sind, als die

Einheit. Ebenso ist 7 die erste ganze Zahl, welche auf 6 folgt; doch gibt es viele Größen, die zwischen 6 und 7 Einheiten enthalten sind. Von der Weise, diese Größen zu messen und auszudrücken, wird erst später die Rede sein.

9. Hätte man viel länger fortgefahren für jede folgende ganze Zahl ein neues Zeichen und einen neuen Namen zu erfinden, so wäre die Numeration sehr schwierig geworden, trotzdem es stets unmöglich geblieben wäre, allen möglichen Zahlen der unbegrenzten Zahlenreihe einen eigenen Ausdruck zu geben. Die Menschen haben darum von jeher und überall sich eines andern Mittels bedient, durch welches man jede mögliche ganze Zahl durch eine sehr einfache Verbindung weniger Zeichen und Worte ausdrücken kann, und wobei weiter nichts erfordert ist, als daß man bis zehn zählen könne. Es besteht in Folgendem:

Hat die zu bestimmende Größe zehn oder mehr Einer; so vereinigt man dieselben in **Gruppen (Verbindungen) von zehn Einern**; eine solche Gruppe nennt man **Zehner**; man zählt denn die Zehner und die Einer, welche übrig bleiben (weniger als zehn, warum?)

Aber wie zählt man die Zehner, wenn deren mehr als zehn sind? Hat man zehn oder mehr Zehner zu zählen, so vereinigt man diese wieder in **Gruppen von zehn Zehnern** oder von Zehnern von Zehnern; eine solche Gruppe nennt man ein **Hundert**; man zählt dann die Hunderte und die übrig bleibenden Zehner.

Hat man zehn oder mehr Hunderte zu zählen, so vereinigt man diese wieder in **Gruppen von zehn Hunderten**, oder von Zehnern und Hunderten; eine solche Gruppe heißt ein **Tausend**; man zählt dann die Tausende und die übrig bleibenden Hunderte.

Auf ähnliche Weise fährt man nöthigenfalls fort die Tausende und die Gruppen der höhern Ordnungen zu zählen.

Ein Zehner von Tausenden heißt ein Zehntausend.
Ein Zehner von Zehntausenden heißt ein Hunderttausend.
Ein Zehner von Hunderttausenden heißt eine Million.
Ein Zehner von Millionen heißt ein Zehnmillion.
Ein Zehner von Zehnmillionen heißt eine Hundertmillion.
Ein Zehner von Hundertmillionen heißt eine Tausendmillion.
Ein Zehner von Tausendmillionen h. eine Zehntausendmillion.
Ein Zehner von Zehntausendmill. h. eine Hunderttausendmillion.
Ein Zehner von Hunderttausendmillionen heißt eine Billion. u. s. w.

10. Bei Angabe einer Zahl zählt man die verschiedenen Gruppen in ihrer natürlichen Ordnung auf, indem man mit der höchsten anfängt. Also z. B. 1 Tausend, 8 Hunderte, 6 Zehner, 4 Einer von Jahren; und nicht 4 Einer,[1] 6 Zehner, 8 Hunderte, 1 Tausend.

Man könnte sogar die Bezeichnung der verschiedenen Gruppen unterlassen, weil man sie an der Ordnung, in welcher sie aufeinanderfolgen, erkennen würde und obige Zahl aussprechen eins, acht, sechs, vier Jahre. Da es aber beim mündlichen Ausdruck mehr auf die Deutlichkeit, als auf die Kürze ankommt, so wendet man diese Abkürzung nicht an; doch ist sie allgemein eingeführt beim Anschreiben der Zahl, und obige Zahl schreibt man daher: 1864 Jahre. Daran, daß die 1 an der vierten Stelle links steht, erkennt man, daß sie Tausende bezeichnet, die darauffolgende 8 bezeichnet Hunderte, die 6 der zweiten Stelle bezeichnet Zehner und die 4 bezeichnet Einer von Jahren.

[1]) Im Gegensatze zu den Zehnern, Hunderten u. s. w. welche man oft als Einheiten höherer Ordnungen ansieht, heißen die einfachen Einheiten gewöhnlich Einer.

Diese Abkürzung scheint aber unzuläßig, wenn in der Ordnung der Gruppen eine oder die andere ausbleibt. 7 Tausende, 4 Zehner und 8 dürfte man z. B. nicht schreiben 748, weil dieses 7 Hunderte, 4 Zehner und 8 bedeutet. In diesem Falle bezeichnet man die Stelle der fehlenden Gruppe durch 0 (Null), welche anzeigt, daß von dieser Gruppe 0 oder keine Einheit vorhanden ist. Obige Zahl wird demnach geschrieben: 7048; 7 Tausende und 8 wird geschrieben: 7008 und 7 Tausende schreibt man: 7000. Nullen, welche man vor eine Zahl setzt, verändern die Stelle der Ziffern nicht und ändern also nichts am Werthe einer Zahl. 0003 ist so viel als 003 oder 3. Kein Tausend, kein Zehner, drei Einer macht 3 Einer.

11. Die Ziffer einer jeden Stelle bezeichnet Zehner der Gruppen (Vergleichsgrößen), welche auf der nächsten Stelle zur Rechten stehen. Vermittelst dieses **Grundgesetzes** der schriftlichen Numeration läßt sich auf einfache Weise erkennen, wie sich die Vergleichsgrößen (Gruppen) der verschiedenen Ordnungen zu einander verhalten. Man wolle z. B. wissen, wieviel Hunderte in dem unterstrichenen Theile folgender Zahl enthalten seien: **21506734**.

7 bezeichnet Gruppen, deren jede ein Hundert Einheiten enthält.

6 bezeichnet Zehner von diesen Gruppen.

0 bezeichnet Zehner von Zehnern oder Hunderte von diesen Gruppen.

5 bezeichnet Zehner von Hunderten oder Tausende von diesen Gruppen.

1 bezeichnet einen Zehner von Tausenden oder ein Zehntausend dieser Gruppen. Man kann also obige Zahl auf folgende Weise aussprechen: 2 Zehnmillionen; 1 Zehn=

tausend von Hunderten, 5 Tausende von Hunderten, 6 Zehner von Hunderten, 7 Hunderte; 3 Zehner und 4 oder 2 Zehnmillionen, 15067 Hunderte, 3 Zehner und 4; In obiger Zahl ist demnach der unterstrichene Theil ausgesprochen worden, als wenn er allein stände (1 Zehntausend, 5 Tausende, u. s. w.); nur bezeichnete er keine Einheiten, sondern Hunderte.

So darf überhaupt jeder beliebige Theil einer Zahl ausgesprochen werden, als sei er eine alleinstehende Zahl, welche Vergleichsgrößen derselben Ordnung bezeichnet, wie die letzte Ziffer dieses Theiles. Denn nach dieser Regel gibt man der letzten Stelle ihren richtigen Werth und mithin auch den vorhergehenden, da jede ausgesprochen wird als ein Zehner der folgenden.

12. Nach diesem wichtigen Grundsatze läßt sich eine Zahl auf sehr verschiedene Weisen richtig **aussprechen;** von diesen vielen richtigen Weisen ist folgende die übliche:

Zehner. Statt 1 Zehner (10) sagt man zehn; statt 2 Zehner (20) zwanzig; statt 3 Zehner (30) dreißig; statt 4, 5, 6, 7, 8, 9 Zehner, vierzig, fünfzig, sechzig, siebenzig, achtzig, neunzig.

Zahlen von zwei Zehnern. Statt 1 Zehner und 1 (11) sagt man elf; 12 heißt zwölf; 13 dreizehn; 14 vierzehn; 15 fünfzehn, u. s. w. Bei zwei und mehr Zehnern spricht man ebenfalls die Einer zuerst aus und verbindet sie mit der Bezeichnung der Zehner durch das Wort und; also 23 heißt dreiundzwanzig; 54 vierundfünfzig.

Drei und vier Ziffern. Statt 1 Hundert, 4 Hunderte, sagt man hundert, vier hundert; und statt 1 Tausend, 5 Tausende, in ähnlicher Weise tausend, fünf tausend.

Bei Zahlen von fünf und sechs Ziffern trennt man

die drei letzten und spricht den ersten Theil aus nach der Regel der vorigen Nummer. 105362 heißt also hundert fünf tausend, dreihundert zwei und sechzig.

Bei Zahlen von mehr als sechs Ziffern trennt man die letzten sechs, dann die sechs folgenden, u. s. w., spricht dann jeden Theil aus, als ob er allein stünde und fügt den Namen der Vergleichsgröße hinzu, welche die letzte Ziffer ausdrückt. Auf der siebenten Stelle stehen die Millionen, auf der dreizehnten die Billionen, auf der neunzehnten die Trillionen, u. s. w. 3605321053236 wird also ausgesprochen: drei Billionen, sechs hundert, fünf tausend, drei hundert ein und zwanzig Millionen drei und fünfzig tausend, zwei hundert sechs und dreißig.[1])

13. Aus dem Gesagten ergibt sich zur Genüge, wie eine ausgesprochene Zahl **anzuschreiben** ist. Hat man eine nach der üblichen Weise oder überhaupt nach Regel 11 ausgesprochene Anzahl von Vergleichsgrößen anzuschreiben, so schreibt man dieselbe wie eine selbstständige Zahl und sorgt dafür, nöthigenfalls durch Ergänzung von Nullen, daß die letzte Ziffer die Stelle der durch die Zahl bezeichneten Vergleichsgrößen einnehme. Vergl. obiges Beispiel.

14. Die Bezeichnung einer Größe (Zahl) suchen nach dem Verfahren von Nr. 10, heißt messen oder zählen; die Bezeichnung (Zahl) einer Größe herleiten aus gewissen Angaben, durch welche dieselbe hinreichend bestimmt wird, heißt rechnen.

[1]) Die Franzosen bilden nur Gruppen von drei Ziffern und nennen Billionen die Vergleichsgrößen der zehnten Stelle, Trillionen die der dreizehnten, u. s. w. Sie sprechen obige Zahl aus: drei Trillionen, sechs hundert fünf Billionen, drei hundert ein und zwanzig Millionen, drei und fünfzig tausend, zwei hundert sechs und dreißig.

Aufgaben.

1. Zähle von 1 bis 1 Zehner.
2. Rückwärts von 1 Zehner bis 1.
3. Die Zahlen von 1 Zehner bis 1 Hundert nach Nr. 9.
4. Nenne dieselben Zahlen rückwärts?
5. Wieviele Punkte sind hier in jeder Zeile?

. . .

. . . .

. . . . .

6. Wieviele sind in den zwei ersten, — in den zwei letzten, — in allen drei Zeilen?

7. Wieviele Scheiben sind in jedem Fenster dieser Schule? Wieviele in allen Fenstern zusammen?

8. Wieviele Buchstaben sind in jeder Zeile des Titels von diesem Buche? Wieviele auf dem ganzen Titel?

9. Wieviele Einheiten enthält diese Linie ?

— — — — — — — — — — — —

a) Wenn — , die Einheit ist?
b) id. — — , d. Einh. ist?
c) id. — — — , d. Einh. ist?
d) id. — — — — , d. Einh. ist?
e) id. — — — — — — — , d. Einh. ist?

10. Mache auf deine Schiefertafel 8, dann 2 Punkte.

11. Zähle diese Punkte zusammen; wieviel hast du deren?

12. Mache auf deine Schiefertafel 9 — 12 — 17 — 21 — 27 — 31 — 29 — 35 Punkte.

13. Wieviele Zehner und wieviel Einer enthält jede von obigen Zahlen?

14. Schreibe auch an 10 — 20 — 30 — 40 Striche.

15. Wieviel Zehner und wieviel Einer enthält jede von diesen Zahlen?

16. Wie würdest du 245 Franken bezeichnen, wenn du für jeden Franken einen Punkt, statt 10 Punkten aber einen Strich, und statt zehn Strichen ein x machen solltest?

17. Bezeichne auf ähnliche Weise 15 Meter — 21 Sous — 50 Thaler — 63 Centimes — 90 Liter — 121 Gramm — 243 Silber-

groschen — 526 Stunden — 841 Bücher — 650 Federn — 365 Tage — 705 Minuten — 630 Meilen — 200 Myriameter — 700 Hectares.

18. Bezeichne auf gleiche Weise, indem du statt zehn *x* ein großes **X** anschreibest, die Zahlen 1853 — 2641 — 3214 — 4750 — 5281 — 3702 — 1240 — 1327 — 2057 — 2507 — 2570 — 2572 — 2300 — 2003 — 2030 — 2000 — 5000.

19. Wie spricht man alle in den beiden letzten Aufgaben enthaltenen Zahlen (nach Nr. 9) aus?

20. Bezeichne auf ähnliche Weise folgende Zahlen und schreibe sie dann auch in Ziffern an (Nr. 10): drei Zehner und fünf Einer; sechs Zehner und sieben Einer; acht Hunderte, zwei Zehner und vier Einer; sechs Hunderte, ein Zehner und neun Einer; vier Tausende, sieben Hunderte und vier Einer; ein Tausend, sieben Hunderte, neun Zehner und zwei Einer; sechs Tausende, sechs Hunderte, drei Zehner und drei Einer.

21. Dasselbe thue mit folgenden Zahlen: Vier Zehner; — Vier Zehner und fünf Einer; — Acht Hunderte und sieben Zehner; — Acht Hunderte und sieben Einer; — Acht Hunderte; — Acht Hunderte, sieben Zehner und vier Einer; — Zwei Tausende, vier Hunderte und neun Zehner; — Zwei Tausende, vier Zehner und neun Einer; — Zwei Tausende, vier Hunderte und neun Einer; — Zwei Tausende und vier Hunderte; — Zwei Tausende und vier Zehner; — Zwei Tausende und vier Einer; — Zwei Tausende.

22. Um eine große Anzahl von Bleistiften zu zählen, bildete man Päckchen von zehn Stück, und es blieben 6 übrig; darauf band man wieder je zehn Päckchen zusammen und es blieben 5 Päckchen übrig; von den neuen Päckchen vereinigte man wieder drei Päcke von zehn und es blieben 4 Päckchen übrig. Wieviel hatte man Bleistifte?

23. Welches sind die drei ganzen Zahlen, die unmittelbar auf jede von Aufg. 12 folgen?

24. Welches sind die drei, die jeder unmittelbar vorhergehen?

25. Zähle von 100 bis 130; von 285 bis 300; von 1225 bis 1240; von 1990 bis 2010.

26. Sprich folgende Zahlen aus (nach Nr. 9): 12345 — 23150 — 20315 — 23015 — 23105 — 23154 — 23100 — 23001 — 20031

— 23010 — 20310 — 20301 — 23000 — 20300 — 20030 — 20003 — 20000 — 135724 — 103572 — 100357 — 100035 — 100003 — 100000 — 100305 — 103005 — 103500 — 1234123 — 1000200 — 1020304 — 1002004 — 1200400 — 1000000.

27. Schreibe an: 1 Million, 2 Hunderttausende, 4 Zehntausende, 3 Tausende, 6 Hunderte und 9; — 2 Hunderttausende, 5 Tausende, 6 Hunderte; — 2 Millionen, 3 Tausende; — 3 Millionen, 5 Hunderte, 4 Zehner.

28. Schreibe die zehn ganzen Zahlen nieder, die auf jede der Zahlen von Aufgabe 26 folgen.

29. Schreibe die ganzen Zahlen von 95 bis 105; von 110 bis 120; von 290 bis 310; von 995 bis 1010; von 9995 bis 10005; von 99995 bis 10005.

30. (Vgl. 11.) Aus wieviel Zehnern und Einern bestehen jede der Zahlen 32 — 81 — 70 — 6 — 114 — 120 — 105 — 300 — 1864?

31. Aus wieviel Zehntausenden, Hunderten und Einern besteht jede der in Aufg. 26 angegebenen Zahlen?

32. Aus wieviel Hunderttausenden, Tausenden und Einern besteht jede?

33. Schreibe folgende Zahlen an: 21 Zehner, 4 Einer; 30 Zehner, 6 Einer; 40 Zehner; 2 Tausende; 15 Zehner, 3 Einer; 2 Tausende, 3 Zehner, 6 Einer; 5 Tausende, 2 Einer; 2 Zehntausende; 25 Hunderte, 16 Einer; 2 Zehntausende, 115 Zehner; 50 Zehntausende, 6 Hunderte, 24 Einer; 4 Zehntausende, 27 Zehner; 45 Hundert, 21 Hunderte, 5 Einer; 43 Hunderttausende, 314 Zehner.

34. Sprich die in Nr. 26 angegebenen Zahlen nach gewöhnlicher Weise aus.

35. Sprich ebenfalls die in Nr. 27 u. 33 angegebenen Zahlen so aus.

36. Schreibe folgende Zahlen an: Fünf und dreißig; fünfzig; hundert zwölf; hundert zwanzig; tausend, acht hundert, fünf und fünfzig; tausend, dreihundert; tausend, zehn; zwei tausend, fünf und zwanzig; hunderttausend, zwanzig; fünf Millionen, zwanzig tausend, hundert vierzehn; drei Millionen, zwölf tausend.

37. Wieviel macht 1500; 1050; 1005; 0150; 0105; 0015; 10015; 200015; 000215? Welche von diesen Zahlen kann man einfacher schreiben?

38. Wieviel Jahre machen 3 Jahrhunderte, 2 Jahrzehnte, 4 Jahre?

39. Wieviel Franken machen 8 Goldstücke, wenn jedes einen Zehner Franken beträgt?

40. Wieviel Meter machen 16 Dekameter? Der Dekameter = 10 Meter.

41. Wieviel Gramm machen jede von folgenden Größen: 5 Kilogramm, 17 Kilog., 205 Kilog., 1125 Kilog.? Das Kilogramm = 1000 Gramm.

42. Wieviel Goldstücke von 10 Franken würde man erhalten, wenn man wechseln ließe 20 Franken, oder 350 Fr., oder 1000 Fr., oder 1210 Fr., oder 1005 Fr.?

43. Wieviel Hektometer sind enthalten in 200 Meter, in 2200 Meter, in 1000000 Meter, in 1050 Meter? Ein Hektometer = 100 Meter.

44. Wieviel Kilogramm sind enthalten in 7000 Gramm, in 17000 Gr., in 100000 Gr., in 18015 Gr.?

45. Wieviel verdient Jemand in einem Jahr, der jeden Monat 100 Fr. verdient?

46. Jemand kauft sich für 150 Franken Tuch; der Meter kostet 10 Fr., wieviel Meter hat er gekauft?

Addition der ganzen Zahlen.

15. Eine Größe ist bestimmt, wenn all ihre Theile bekannt sind. Eine Größe ausrechnen, deren Theile man kennt heißt **addiren.** Das Ganze, welches durch die Addition gesucht wird, heißt die **Summe** der bekannten Theile, und diese heißen **Summanden.** Das Ganze, dessen Theil 8, 5 und 9 Einheiten sind, wird auf folgende Weise bezeichnet: $3+5+9$ (sprich: 3 plus 5 plus 9).

= oder „gleich" bedeutet, daß zwei Zahlen einander gleich sind; also $7+1=8$.

16. Hat man bloß Einer zu addiren, so löst man diese in Einheiten auf und zählt die Summe (das Ganze) nach Regel 10.

Beispiele: 8+5=8+1+1+1+1+ was man zählt: „8, 9, 1 Zehner und 1, 2, 3.“ Also 13.

8+5+9. 8+5=13. 13+9=13+1+1+1+1+1+1 +1+1+1=2 Zehner und 2=22.

Der geübte Rechner muß aber diese einzelnen Resultate [1]) auswendig wissen.

17. Bei Zahlen mit Zehnern, Hunderten, u. s. w., könnte man in ähnlicher Weise verfahren; doch wäre es sehr thöricht die Gruppen in Einheiten zu zerlegen, um sie gleich nachher wieder in Gruppen von Zehnern, Hunderten, u. s. w. zu sammeln. Man zählt also die Einer, Zehner, Hunderte, u. s. w., zusammen, und wenn man deren zehn hat so bildet man daraus eine Vergleichsgröße einer höhern Ordnung, welche man zu den andern dieser Ordnung hinzuzählt.

Beispiel: 2341+805+9162+29501.

Zu größerer Bequemlichkeit schreibt man die Einer, Zehner, u. s. w., untereinander, und spricht dann 1+5=6.

2341	6+2=8. 8+1=9 (oder abgekürzt 1 und 5
805	macht sechs, und 2 acht, und 1 neun), welche
9162	ich, da es Einer sind, unter die Einer stelle.
99501	4 und 0 macht 4, und 6 macht 10, und 0
111809	macht 10 Zehner oder 1 Hundert, das ich zu

den Hunderten zählen will. Ich lasse aber die Stelle der Zehner nicht unbesetzt, sondern setze eine Null hin (warum?)

Dieses Hundert und 3 macht 4, und 8 macht 12, und 1 macht 13, und 5 macht 18 Hunderte, oder 8 Hunderte, die

[1]) Resultat heißt jede Zahl, die man durch eine Rechnung findet. Die Summe ist also das Resultat einer Addition.

ich aufschreibe und 1 Tausend, das ich behalte, um zu den Tausenden zu zählen.

Dieses Tausend und 2 macht 3, und 9 macht 12 und 9 macht 21 oder 1 Tausend, das ich anschreibe und 2 Zehntausende, die ich behalte.

2 Zehntausende und 9 macht 11 Zehntausende (vgl. 13).

Anmerkung. Man hat nicht einmal nöthig Acht zu geben, ob man Zehner oder Tausende addirt, und kann diese Bezeichnung auslassen, denn dadurch, daß man die Summe der einzelnen Additionen unter die betreffenden Ziffern der Summanden setzt, steht sie an ihrer rechten Stelle, und die etwa behaltenen Zehner dieser Stelle sind jedenfalls Einheiten der folgenden Stelle.

18. Da es einerlei sein muß, an welchem Ende man anfängt ein Ganzes zu zählen, oder in welcher Ordnung man dessen Theile addirt, so kann man auch von unten herauf die Summanden zusammen zählen. Hat man die Addition nach der ersten Art gemacht, so wiederholt man sie gewöhnlich in der zweiten Weise zur **Probe.**

Probe einer Rechnung heißt eine andre Rechnung welche die Richtigkeit der ersten bestätigen soll. Da man aber in der Probe auch irren kann und dieser Irrthum möglicherweise so beschaffen sein kann, daß er den ersten aufhebt d. h. unkenntlich macht, so ist die Probe kein eigentlicher Beweis von der Richtigkeit der ersten Rechnung. Doch geschieht es nicht leicht, daß Fehler in beiden Rechnungen sich genau aufheben.

Aufgaben.

1. Addire 2 und 4 und 5.
2. Wieviel macht 6+7+9+8?
3. Wieviel macht 16+24+31?

4. Wieviel macht 16+7+25+8?

5. Wieviel macht 313+218+753+81?

6. Wieviel macht 2161+3205+741+44+73+3?

7. Wieviel macht 78415+8361+105764+231+41522?

8. Welches ist die Summe aller in den beiden vorigen Aufgaben angeführten Zahlen?

9. Welches ist die Summe der in der 3ten und 4ten Aufgabe angeführten Zahlen?

10. Suche die Summe der in der 5ten und 6ten Aufgabe angeführten Zahlen.

11. Suche die Summe der in der 3ten und 5ten Aufgabe angeführten Zahlen.

12. Suche die Summe der in der 4ten und 6ten Aufgabe angeführten Zahlen.

13. Addire die durch die 9te und 10te Aufgabe gefundenen Summen zusammen.

14. Addire ebenso die in der 11ten und 12ten Aufgabe ausgerechneten Summen.

* Warum gibt die 13te und 14te Aufgabe dir dasselbe Resultat?

15. Welches ist die Summe von 35+35+35?

16. Welches ist die Summe von 4 Zahlen, jede von 25 Einheiten?

17. Welches ist die Summe von 10 Zahlen, jede von 32 Einheiten?

18. Welches ist die Summe von 10 Zahlen, jede von 375 Einheiten?

19. Welches ist die Summe

a) von 2
b) — 3
c) — 4
d) — 5
e) — 6
f) — 7
g) — 8
h) — 9
i) — 10 Zahlen, jede von 2 Einheiten?

20. Rechne auf dieselbe Weise diese 9 verschiedene Summen aus, für den Fall, wo jede Zahl 3 Einheiten hat.

21. Wiederhole dieselben Rechnungen für den Fall wo man Zahlen hat von 4 Einheiten, u. s. w.

22. Eine Schule besteht aus drei Abtheilungen; die erste zählt 23 Schüler, die zweite 31 und die dritte 45. Wieviel Schüler sind in dieser Schule?

Auflösung. Man kennt hier die drei Theile der zu suchenden Schülerzahl, nämlich 23 und 31 und 45; das Ganze findet man also durch die Addition, und es ist gleich 21+31+45.

23. Ein Schreiner hat von einem Herrn zu empfangen, erstens: 36 Fr. für drei Tische; 42 Fr. für ein Dutzend Stühle; 75 Fr. für einen Schrank und 25 Fr. für eine Bettstelle; wieviel erhält er zusammen?

24. In welchem Jahre ward Jerusalem zerstört? Dies geschah 36 Jahre nach der Kreuzigung Christi (i. J. 33)?

25. Von der Erschaffung der Welt bis zur Berufung Abraham's verflossen 2083 Jahre; von der Berufung Abraham's bis zu Moses 512 Jahre; von da ab bis zum Anfange der Regierung Saul's 476 Jahre; 120 Jahre später ward das Reich getheilt, und 365 Jahre nach dieser Theilung Jerusalem von Nabuchodonosor zerstört. Nach einem Zeitraum von 146 Jahren wurde es jedoch im Jahre 444 vor Christus wieder auferbaut. In welchen Jahren nach der Erschaffung der Welt fanden also statt die Berufung Abraham's, der Einzug in's gelobte Land, die Theilung des Reiches, der Wiederaufbau von Jerusalem statt?

26. In welchen Jahren vor der Geburt Christi ward Jerusalem zerstört, das Reich getheilt, Saul zum König gesalbt, Abraham berufen, die Welt erschaffen?

27. Peter hat 1325 Franken; Paul hat 75 Fr. mehr als Peter und Fritz hat 621 Fr. mehr als beide zusammen. Wieviel hat Paul und Fritz, und wieviel haben alle drei zusammen?

28. Jemand hat auf eine Schuld bezahlt 2157 Fr.; darnach 375 Fr. und später noch 1089 Fr.; da blieb er noch gerade soviel schuldig als er bezahlt hatte; wie hoch belief sich seine Schuld?

29. In einer Haushaltung wurden im Jahre 1863 folgende Ausgaben gemacht:

Monate.	Ausgaben im Jahre 1863 für					Monatliches Total.
	Nahrung.	Wäsche u. andere Ausgab.	Kleider.	Heizung und Licht.	Miethe.	
Januar	75 Fr.	20 Fr.	23 Fr.	16 Fr.	23 Fr.	
Februar	81 —	24 —	10 —	5 —	23 —	
März	96 —	18 —	18 —	34 —	23 —	
April	80 —	10 —	23 —	12 —	23 —	
Mai	71 —	8 —	158 —	7 —	23 —	
Juni	65 —	5 —	10 —	11 —	23 —	
Juli	68 —	5 —	8 —	5 —	23 —	
August	73 —	6 —	6 —	3 —	23 —	
September	81 —	10 —	5 —	4 —	23 —	
Oktober	85 —	11 —	151 —	10 —	23 —	
November	79 —	18 —	12 —	14 —	23 —	
Dezember	83 —	21 —	33 —	75 —	23 —	
Total . .						

Wieviel wurde jeden Monat ausgegeben (in die letzte Colonne einzutragen), und wieviel wurde im Ganzen verzehrt für Nahrung, Heizung, ꝛc. (in die untere Zeile einzutragen), und wie hoch belief sich die Gesammt-Ausgabe für das ganze Jahr?

30. Welches ist die Summe der Zahlen von 1 bis 10?

31. Welches ist die Summe der Zahlen von 21 bis 30?

32. Peter hat 16 Nüsse, Paul 6 mehr als Peter, Fritz 6 mehr als Paul, und Ernst 6 mehr als Fritz. Wieviel haben sie deren zusammen.

33. Warum fängt man die Addition mit den Einern an und nicht mit der größten Vergleichsgröße? Man versuche es auf letzterem Wege und gebe den Uebelstand an, auf den man stößt. (Vgl. Nr. 9.)

Subtraction der ganzen Zahlen.

19. Ein Theil eines Ganzen ist bestimmt, wenn man dieses Ganze und dessen andern Theil kennt. Das bekannte Ganze (die Summe zweier Zahlen) heißt in diesem Falle **Minuend**; der bekannte Theil (die eine bekannte Zahl)

heißt **Subtrahend** und der zu suchende Theil (die unbekannte Zahl) heißt **Differenz** (d. i. Unterschied), weil er angibt, um wieviele Einheiten das Ganze größer ist, als der eine Theil. Er heißt auch **Rest**, weil er übrig bleibt, wenn man den bekannten Theil vom Ganzen (den Subtrahend vom Minuend) abzieht.

Einen Theil eines Ganzen suchen, wenn man dieses Ganze und dessen andern Theil kennt, heißt **subtrahiren**.

Eine Subtraction wird angezeigt durch einen Querstrich (—); der Minuend steht vor, der Subtrahend nach diesem Zeichen, das minus (d. i. weniger) ausgesprochen wird. Die Zahl, die man zu 5 fügen muß, um 9 zu erhalten, wird demnach bezeichnet durch 9—5.

20. Leicht findet man daß 9—5=4. Denn

5+1=6
5+2=7
5+3=8
5+4=9 oder 9—5=4.

Nicht schwieriger ist die Subtraction, wenn der Minuend größer als 10 und kleiner als 20 ist.

Beispiel: 17—8.

8+1=9
8+2=10
8+2+7=10+7 oder
8+9=17 oder 17—8=9.

Der geübte Rechner weiß derartige einfache Resultate auswendig.

21. **Mehrzifferige Zahlen** stellt man bei der Subtraction zu größerer Bequemlichkeit unter einander wie bei der Addition und zieht die Einer des Subtrahends von denen des Minuends ab; dann

ebenso die Zehner, Hunderte, u. s. w. Beispiel 23875 —11432.

23875	Man spricht dabei 2 von 5 bleibt 3;
11432	3 von 7 bleibt 4;
12443	4 von 8 bleibt 2;
	1 von 3 bleibt 2;
	1 von 2 bleibt 1.

Offenbar ist der so gefundene Rest diejenige Zahl, welche man zum Minuend addiren muß, um den Subtrahend zu finden.

22. Sind die unter einander stehenden Ziffer sich einander gleich, so braucht man zu der des Subtrahends nichts hinzuzufügen, um die des Minuends zu erhalten; man bezeichnet alsdann die Stelle der fehlenden Ziffer im Reste durch eine Null.

Beispiel: 32345—22325=10020.

23. Ist eine Ziffer des Minuends kleiner als die Ziffer derselben Stelle im Minuend, so fügt man, um diese einzelne Subtraction möglich zu machen, zehn von den Vergleichsgrößen dieser Stelle zum Minuend und zieht von demselben einen Zehner der folgenden Stelle ab, wodurch nichts geändert wird.

Beispiel: 20005096—6752383. Man spricht also:

20005086	3 von 6 bleibt 3
6752393	9 von 8 geht nicht. (Ich füge jetzt 10 Einheiten
13252693	dieser Stelle zum Minuend und subtrahire) 9

von 18 bleibt 9.

(Bei der folgenden Stelle zähle ich die zum Minuend hinzugefügte Einheit dieser Stelle und die 3 Einheiten des Minuends ab und sage also) 3 und 1 behalten macht 4;

4 von 0 geht nicht. (Ich füge darum wieder 10 Einheiten dieser Stelle zum Minuend) 4 von 10 bleibt 6.

(Bei der folgenden Stelle zähle ich die zum Minuend hinzugefügte Einheit dieser Stelle und die 2 Einheiten des Subtrahends ab, also) 2 und 1 behalten macht 3, 3 von 5 bleibt 2. (Ebenso fahre ich fort) 5 von 10 bleibt 5, 7 und 1 behalten macht 8, von 10 bleibt 2,

6 von 10 bleibt 4

1 von 2 bleibt 1.

24. Die **Probe** der Subtraction ergibt sich aus ihrer Begriffsbestimmung. Eine Subtraction ist dann und nur dann richtig gemacht, wenn bei der Addition des Restes zum Minuend der Subtrahend herauskommt (19).

Andere Probe. Kommt der Subtrahend heraus, wenn man den Rest vom Minuend abzieht, so ist dies auch ein Beweis ihrer Richtigkeit (zu beweisen).

Aufgaben.

1. Mache folgende Subtractionen: 8—5; 9—5; 9—6; 7—4; 3—2; 3—3.

2. 13—4; 13—5; 14—5; 11—8; 12—9; 18—9; 17—9.

3. Von 24 soll 13; von 38 soll 24; von 46 soll 15; von 76 soll 35; von 98 soll 32; von 87 soll 12; von 236 soll 121; von 3486 soll 1234; von 7824 soll 3512 abgezogen werden.

4. Was macht 22—12; 38—18; 215—105; 3682—1581; 2353—1343.

5. Subtrahire: 18 von 31; 16 von 25; 32 von 45; 38 von 61; 124 von 241; 237 von 262; 685 von 758.

6. Ziehe ab: 1325 von 2216; 6481 von 6295; 3476 von 7235; 1765 von 3941.

7. Ziehe ab: 11 von 30; 251 von 607; 346 von 703; 2481 von 4506; 1678 von 2900; 2674 von 4005; 2674 von 4001; 26784 von 40001; 20004 von 40001.

8. Die Summe zweier Zahlen ist 53021; die eine dieser Zahlen ist 14916, welches ist die andre? (Vergl. Definition.)

9. Paul hat 267 Nüsse, Peter 185; wieviel hat Paul mehr?

Auflösung. Peter's Nüsse und die Nüsse, die Paul mehr hat, machen Paul's Nüsse oder 267 aus. Man kennt also die Summe von zwei Zahlen (267), die eine von diesen Zahlen (185) und findet daher die andre (die Nüsse, die Paul mehr hat als Peter) durch die Subtraction 267—185.

10. Um wieviel ist 91235 größer als 871?

11. Um wieviel ist 1624 kleiner als 2000?

12. In einem Baumgarten stehen 1825 Bäume, davon 918 auf der linken Seite; wieviel auf der rechten?

13. Jemand ist 4321 Franken schuldig, er hat aber nur 2112; wieviel fehlt ihm, um alles bezahlen zu können?

14. In einer Schule von 108 Kindern sind 93 gegenwärtig, wieviel fehlen?

15. Ein ander Mal fehlten 20; wieviel waren zugegen?

16. Vermindere 3154 um 500 Einheiten.

17. Was muß man zu 112 hinzufügen, um 600 zu finden?

18. Napoleon wurde geboren 1769 und starb i. J. 1821, wie alt ist er geworden?

19. Der erste Kreuzzug fand i. J. 1096, der letzte i. J. 1270 statt; wie lange dauerte die Zeit der Kreuzzüge?

20. Im J. 1700 zählte Frankreich 19600000 Seelen, i. J. 1800 aber 29300000 und 1841 deren 34200000; um wieviel Seelen ist die Bevölkerung gewachsen von 1700 bis 1800, von 1800 bis 1841, von 1700 bis 1841?

21. Ein Baumgärtner, welcher 325 Aepfel-, 416 Birn-, 315 Zwetschen-, 410 Kirschen- und 100 Aprikosen-Bäume hatte, verkaufte 65 Stück von der ersten, 37 Stück von der zweiten, 54 Stück von der dritten, 12 Stück von der vierten und keines von der letzten Gattung; wieviel hatte er im Ganzen, wieviel hat er im Ganzen verkauft, wieviel behält er von jeder Sorte, wieviel behält er im Ganzen?

22. Welches ist der Unterschied zwischen der Summe 215+351+4125 und der Zahl 3148?

23. Um wieviel ist die Zahl 31845 größer als die Summe von 3114+2181+5842?

24. Ist die Summe von 2181+3145+2005 oder die von 6144+305+989 größer; wie stark ist der Unterschied?

25. Jemand ist 8414 Franken schuldig; darauf bezahlt er 354 Fr. dann 1005 Fr. und später 2115; wieviel bleibt er schuldig?

26. Ein Handwerker verdient Montags 50 Sous und verzehrt deren 25; Dienstags verdient er 45 und verzehrt 32; Mittwochs verdient er 28 und verzehrt 24; Donnerstags verdient er nur 12 und verzehrt 35; Freitags verdient er 50 und verzehrt 29; Samstags verdient er 45 und verzehrt 18; Sonntags verdient er nichts und verzehrt 35; wieviel bleiben ihm noch übrig?

27. Jemand hat bei einer Subtraction 125 als Rest gefunden; doch hatte er sich geirrt im Anschreiben des Minuends, den er um 25 Einheiten stärker hätte anschreiben müssen; welches ist der wirkliche Rest?

28. Eine Subtraction gibt als Rest 215 Einheiten; welchen Rest hätte man gefunden, wenn der Minuend um 85 Einheiten stärker und welchen, wenn er um 85 Einheiten geringer gewesen wäre?

28. Bei einer Subtraction ist der Minuend 8145 und der Rest 315; welches muß der Subtrahend sein?

29. Von welcher Zahl muß man 185 subtrahiren, um 3154 als Rest zu finden?

30. Ein Nota von Waaren beträgt im Ganzen 21565 Centimes. Ein Artikel war zu hoch angesetzt, nämlich zu 3465 Centimes statt zu 3050 Centimes; ein andrer Artikel von 2500 war irrthümlich in der Nota angeführt, der daher nicht bezahlt wird. Der Empfänger der Nota bezahlt nun in Gold 20000 Centimes; wieviel muß ihm der Kaufmann wiedergeben?

31. Wieviel macht 9+21; 99+215; 999+215; 9999+2105; 99999+21450?

32. Wieviel macht 10—9; 100—99; 1000—999; 10000—9999; 100000—99999?

33. Wie wäre eine Summe zu berichtigen, wenn Jemand bei der Ausrechnung derselben statt 9 einen Zehner, oder statt 99 ein Hundert, oder statt 99999 die Zahl 100000 addirt hätte? Wie kann man darum die Summen von Aufgabe 31 einfacher ausrechnen?

34. Folgende Summen auf die einfachste Weise auszurechnen: 234+98; 1235+997; 56378+99996.

35. Wieviel macht 10—9; 100—54; 1000—781; 10000—5090; 100000—87027; 1000000—99996?

36. Diese Reste heißen die Complemente der subtrahirten Zahlen; Complement heißt der Unterschied zwischen einer Zahl und einer Einheit der unmittelbar höheren Vergleichsgröße. Eine Regel zu finden, um auf einfache Weise diese Complemente zu bilden.

37. Man hatte drei vierzifferige Zahlen zu subtrahiren und statt dessen hat man deren Complemente addirt und auf diese Weise 182259 gefunden. Wie ist das Resultat zu berichtigen?

38. Man berechne, indem man statt der zu subtrahirenden Zahlen deren Complemente addirt und dann das Resultat berichtigt: 43—85—21+60+50—36+47+93.

39. In ähnlicher Weise berechne man 13256—65211+24079——87654—43219+41005.

40. In ähnlicher Weise berechne man 984150—699999+54321—41556+872315—120120—123456—234567.

41. In ähnlicher Weise berechne man den Kassenbestand eines Einnehmers am 1. April, der Anfangs Januar 83452 Franken in Cassa hatte, in diesem Monate 543543 Franken einnahm u. 672909 Franken ausgab, im Februar 54870 Franken einnahm und zweimal 23700 Franken ausgab, im März nichts einnahm und 12735+23615 Franken ausgab.

42. Jemand hat bei einer Addition den Summanden 1342 schlecht angeschrieben, so daß die 2 unter die Zehner, die 4 unter die Hunderte zu stehen kam, u. s. w. Wie ist die gefundene Summe zu berichtigen?

43. Wie oft kann man 325 von 1000 wegnehmen?

44. Wieviel Thaler (1 Thlr. = 375 Centimes) sind in 15 Fr. (1 Fr. = 1 Hundert Centimes)?

Multiplication der ganzen Zahlen.

25. Weiß man wieviel Einheiten in einer Größe enthalten sind, so ist dadurch die in einer gewissen Zahl solcher Größen enthaltene Anzahl von Einheiten bestimmt. Die

Zahl der in einer Größe enthaltenen Einheiten heißt **Multiplicand**, die Zahl der vorhandenen Größen **Multiplicator**, und die Zahl der in allen Größen enthaltenen Einheiten **Product**. Das Product suchen heißt **multipliziren**.

Das **Zeichen** der Multiplication ist ein Andreaskreuz × und heißt **multiplizirt durch**; vor demselben steht der Multiplicand, nach demselben der Multiplicator.

Die Zahl der in 5 Wochen enthaltenen Tage wird also bezeichnet durch 7×5 Tage[1]) und 12×9 (sprich 12 multizirt durch 9) bezeichnet 9 Größen von 12 Einheiten, oder 9 Dutzend, oder 9 mal 12 Einheiten.

26. 7×5 oder 5 Größen von 7 Einheiten macht

$$
\begin{array}{rl}
7+7+7+7+7 = & 1+1+1+1+1+1+1 \\
& 1+1+1+1+1+1+1 \\
& 1+1+1+1+1+1+1 \\
& 1+1+1+1+1+1+1 \\
& 1+1+1+1+1+1+1 \\
& 1+1+1+1+1+1+1 = \\
\hline
& 5+5+5+5+5+5+5 =
\end{array}
$$

7 Größen von 5 Einheiten oder 5×7.

Dieses Verfahren läßt sich auf jeden Multiplicand und jeden Multiplicator anwenden, und zeigt uns, daß man

[1]) Anmerkung. Das Product bezeichnet also Einheiten wie der Multiplicand (Tage); der Multiplicator bezeichnet andere Größen (Wochen) oder, wenn man will, Einheiten einer andern Gattung; demnach könnte man also ebenso gut sagen, die Multiplication sei eine Rechnung, wodurch man eine Zahl Einheiten (5 Wochen) in Einheiten einer andern Art (Tage) verwandelt, wenn man weiß, wieviel Einheiten dieser Sorte (7) in einer der ersten Gattung enthalten ist. 5 Wochen = 7×5 Tage.

bei der Multiplication den Multiplicand und Multiplicator mit einander verwechseln darf. Man braucht darum nicht Acht darauf zu geben welche von beiden Zahlen der Multiplicand oder Multiplicator sei und bezeichnet sie mit dem gemeinschaftlichen Namen **Factoren.**

27. **Multiplication zweier einzifferigen Zahlen** miteinander.

Beispiel: $7 \times 5 = 7+7+7+7+7 = 35$.

Diese Producte findet man also durch Hilfe der Addition. Man muß aber derartige einfache Producte auswendig wissen, und zu diesem Zwecke folgende Tabelle (die pythagoräische Tabelle) sich zuerst ausrechnen und dann auswendig lernen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

28. Multiplication einer mehrzifferigen Zahl durch eine einzifferige. Beispiel. 58014×7=58014+
58014+
58014+
58014+
58014+
58014+
58014=

406098

Diese Addition kürzt man ab, indem man die 7 gleichen Summanden nur einmal anschreibt, darunter den Multiplicator 7 setzt, welcher die Anzahl der Summanden bezeichnet, und alsdann statt zu rechnen 4+4+4+4+4+4+4=28, gleich mit Hilfe der vorigen Tabelle spricht: 4 mal 7=28, u. s. w. Daraus ergibt sich folgende Regel: **Man multiplizirt nacheinander die Ziffern des Multiplicandes mit dem Multiplicator, indem man mit den Einern anfängt, und verfährt mit dem Anschreiben der Einer, dem Behalten der Zehner und dem Nebeneinanderschreiben der Ziffern genau wie bei der Addition.**

  58014
      7
406098

Anmerkung. Man merke sich, daß die fehlenden Stellen, wie bei der Addition, durch eine 0 besetzt werden müssen. Man sagt dabei 7 mal 0 (oder 7 mal nichts) =0; so wie auch 0 mal 7 (oder kein mal 7) =0.

29. Multiplication mit Factoren, welche mit einer oder mehreren Nullen endigen. Beispiel mit **Nullen am Multiplicand:**

13000×12=13000+	Bei der Summe sind die drei
13000+	letzten Ziffern zur Rechten 3 Nul-
13000+	len; die andern Ziffern der Sum-
13000+	me findet man, wenn man 12 Sum-
13000+	manden von 13 Einheiten addirt
13000+	oder 13 mit 12 multiplizirt. Aehn-
13000+	lich muß es sich verhalten mit je-
13000+	der beliebigen Zahl von Nullen am
13000+	Multiplicand und mit jedem beliebi-
13000+	gen Multiplicator. Endigt also der
13000+	Multiplicand mit einer oder
13000=	mehreren Nullen, so multiplizirt
156000	man, als ob diese nicht vorhan-

den wären und hängt dem Producte so viele Nullen an, als der Multiplicand deren (am Ende) hat.

30. Beispiel mit Nullen am Multiplicator. 13×12000 =12000×13 (26). Dieses Product findet man, indem man 12 mit 13 oder auch (26) 13 mit 12 multiplizirt und dem Producte 3 Nullen anhängt (29). Endigt also der Multiplicator mit einer oder mehreren Nullen, so multiplizirt man, als ob diese nicht vorhanden wären und hängt dem Producte so viele Nullen an, als der Multiplicator deren (am Ende) hat.

31. Beispiel mit Nullen an beiden Factoren. 13000×1200.

Hier hat man 13000 durch 12 zu multipliziren und zwei Nullen anzuhängen (30). Um aber 13000 durch 12 zu multipliziren hat man 13 durch 12 zu multipliziren und drei Nullen anzuhängen (29). Man multiplizirt also 13 durch 12 und hängt fünf Nullen an, denn wenn man 13 durch 12 multiplizirt und drei Nullen anhängt, erhält man 13000 ×12, und wenn man noch zwei Nullen hinzufügt, erhält

man 13000×1200. Hieraus ergibt sich die **allgemeine Regel:** Wenn ein Factor oder beide Factoren mit Nullen endigen, multiplizirt man, als ob diese nicht vorhanden wären, und hängt dann dem Producte so viele Nullen an, als beide Factoren zusammen (am Ende) haben.

32. Multiplication mit zwei mehrziffrigen Factoren. Beispiel. 210453×51672.

210453×51672 will sagen 51672 Größen von 210453 Einheiten, oder			210453
			51672
2	Größen v. 210453 Einh.	=	420906 Einh.
+70	—	= (Nr. 30).	14731710 Einh.
+600	—	= (Nr. 30).	126271800 Einh.
+1000	—	=	210453000 Einh.
+50000	—	=	10522650000 Einh.
	Also zusammen	. . . .	10874527416 Einh.

Anderes Beispiel. 10546×2000305=2000305 Größen von 10546 Einheiten, oder

			10546
			2000305
5	Größen von 10546 Einheiten	=. .	52730
+300	—	=. .	3163800
+2000000	—	=. .	21092000000
	Zusammen	=. .	21095216530

Anmerkung. Die jedem einzelnen Producte angehängten Nullen dienen nur dazu, die richtigen Stellen der Ziffern zu bezeichnen (10); man kann sie darum weglassen, wofern man beim Untereinanderschreiben der einzelnen Producte die Stellen dieser Nullen unbesetzt läßt.

```
      210453                    10546
       51672                  2000305
      420906                    52730
     1473171                  31638
    1262718               21092
    210453                21095216530
  1052265
  10874527416
```

Bei jedem einzelnen Producte müssen soviel Stellen unbesetzt bleiben, als auf die Ziffer, mit welcher man multiplizirt im Multiplicator, noch Stellen folgen; in andern Worten, die erste Ziffer jedes einzelnen Productes muß an derselben Stelle stehen, als die betreffende Ziffer des Multiplicators. Daraus ergibt sich folgende Regel: Man multiplizirt den Multiplicand mit jeder einzelnen Ziffer des Multiplicators; man schreibt die einzelnen Producte so untereinander, daß die erste Ziffer eines jeden unter die Ziffer des Multiplicators zu stehen kommt, mit welcher man gerade multiplizirt. Dann unterstreicht man die einzelnen Producte und addirt dieselben.

Anmerkung. Nach Nr. 31 und Nr. 32 stellt sich die Ausrechnung von 13000×1200 auf folgende Weise dar:

```
    13000
    1200
    26
   13
   15600000
```

33. Zur **Probe** kann man den Multiplicator durch den Multiplicand multipliziren (26).

Probe zu obigem Beispiel.

```
      51672
      210453
      155016
     258360
    206688
   51672
  103344
  10874527416
```

Aufgaben.

1. (25) Durch was für eine Rechnung findet man die Anzahl der in 5 Wochen enthaltenen Tage?

Antwort. Durch die Multiplication. Denn nimmt man den Tag als Einheit an, so findet man die in 5 Größen, jede von 7 Einheiten, enthaltenen Einheiten durch die Multiplication (29). Welche Zahl ist hier Multiplicand, Multiplicator und Product?

2. Durch welche Rechnungsart findet man die Zahl, die 8 mal so groß ist als 215? Warum? Multipl., x., anzugeben wie oben.

3. Durch welche Rechnungsart findet man den Preis von 15 Ellen Tuch, wenn man weiß, daß eine Elle 8 Franken kostet?

4. Durch welche Rechnungsart findet man die Anzahl der Bleistifte, die man bekommt für 4 Fr., wenn man weiß, daß 4 Stück einen Franken kosten?

5. (28)Wiederholung der Aufgaben 15 und 16 über die Addition.

6. Wieviel macht 23×4; 37×6; 81×7; 81×8; 215×5; 215×6; 216×6; 3142×2; 3142×7; 3142×9?

7. Wieviel Centimes machen 3 Thaler (1 Thlr.=375 Cent.)?

8. Wieviel Centimes machen 5 Thaler?

9. Wieviel Centimes machen 8 Thaler? (Auf 2 Arten.)

10. Wenn man die zwei Produkte 375×3 und 375×5 addirt, so erhält man das Produkt 375×8; warum?

11. Wieviel Stunden sind in 7 Tagen?
— — 5 Tagen?
— — 12 Tagen? (Direct und mit Hilfe der beiden obigen.)

12. Wenn man 24×5 von 24×7 abzieht, so erhält man 24×2; warum?

13. Ein Armer bekommt wöchentlich von einem bemittelten Verwandten 18 Sous und von einem andern Wohlthäter 9 Sous; wieviel erhält er in 7 Wochen von diesem, wieviel von jenem, wieviel von beiden zusammen?

14. Wenn man 18×7 und 9×7 addirt, so erhält man 27×7; warum?

15. Jemand gewinnt täglich 46 Sous; er verzehrt deren täglich 35; wieviel gewinnt, wieviel verzehrt und wieviel legt er bei Seite in 6 Tagen?

16. Wenn man 35×6 von 46×6 abzieht, so bleibt 11×6, warum?

17. (26) 3×375; 6×2184; 7×3144; 8×3144; 9×61785; 9×61786?

18. Wieviel Tage sind in 52 Wochen?

19. Wieviel Centimes machen 241 Sous?

20. Ein Haus hat 36 Fenster, jede von 8 Scheiben, wieviel Scheiben?

21. Die Monate April, Juni, September und November haben 30 Tage; Februar hat in einem gewöhnlichen Jahre deren 28, und die übrigen 7 Monate des Jahres haben jeder 31; wieviel Tage sind in einem gewöhnlichen Jahre?

22. Wieviel Fünffrankenstücke bekommt der, welcher 5 Goldstücke von 20 Franken auswechseln läßt?

23. 5 Fünffrankenstücke = wieviel Zweifrankenstücke?

24. Wieviel Bilder von 15 Cent. bekommt man für 15 Sous?

25. (29) Wieviel machen 16 Größen von 10 Einheiten, 27 Größen von 1000 Einheiten?

26. Wiederholung der Aufgaben 38 bis 41 über die Numeration (Seite 10).

27. (30) Wiederholung der Aufgaben 16, 17, 18, über die Addition (Seite 14).

28. Wieviel macht 217×100; 2145×10000?

29. Wieviel Silbergroschen enthält ein Goldstück von 10 Franken? (1 Fr. = 8 Sgr.) — Wieviele enthalten 7 solcher Goldstücke?

30. Wieviel Franken enthalten 7 Goldstücke von 10 Franken? wieviele Silbergroschen?

31. Wenn der Gramm geprägten Goldes 310 Centimes gilt, was gilt der Kilogramm (= 1000 Gramm)? was 8 Kilogramm?

32. Wieviel Gramm sind in 8 Kilogramm enthalten, wieviel gelten also dieselben?

33. Wenn der Are Landes 975 Centimes werth ist, was gilt der Hektare (= 100 Ares)? was 152 Hektares?

34. Wieviel Ares sind in 152 Hektares; was gelten dieselben, wenn der Are 975 Centimes gilt?

35. Das Product von 375 und 10 soll mit 7 multiplizirt werden.

36. Das Product von 218 und 100 soll mit 9 multiplizirt werden.

37. Multiplizire 375 mit dem Product von 7 und 10.

38. Multiplizire 218 mit dem Product von 100 und 9.

39. Multiplizire das Product von 218 und 9 mit 100.

40. Wieviel macht 7×3750; 9×82100; 8×315000; 6×21400000?

41. (32) Ein Mühlenrad dreht sich in einer Minute 25 mal; wie oft in 32 Minuten?

42. Welches ist die Summe von 25 Größen, jede von 75 Einheiten?

43. Was macht 217×341; 219×145; 1345×25; 1234×81; 3456×7892; 30×500; 21000×520000?

44. Was macht 12345679×27; 12345679×81?

45. Wieviel macht 909×11; 214×303; 14789×409; 45207×207; 10237×1007; 1023078×408; 2045007×2004; 2160×50; 20160×50; 21060×505; 201060×5005; 2010600×50005; 45607×207?

46. Eine Erbschaft wurde unter 12 Personen getheilt; jede erhielt 2105 Franken; wie groß war die Erbschaft?

47. Welche Zahl ist 205 mal so groß, als 17231?

48. Eine Zahl ist 310 mal so groß, als eine andere, welche 1050 mal so groß ist als 67210. Welches ist die erste Zahl? Wieviel mal ist die erste so groß als die letzte?

49. Man kauft 125 Ellen Tuch zu 1250 Centimes die Elle. Wie viel kosten dieselben? Man verkauft jede 150 Centimes theuerer; wie theuer werden sie zusammen verkauft und wie viel wird auf dem Handel gewonnen?

Division der ganzen Zahlen.

34. (Vergl. 25.) Kennt man einen Factor eines bekannten Productes, so ist dadurch der andere Factor bestimmt d. h. es kann nur **eine** Zahl geben, welche, mit dem bekannten Factor multiplizirt, das fragliche Product hervorbringt. Diesen unbekannten Factor suchen heißt **dividiren.** Es gibt demnach zweierlei Divisionen:

Erste Art. Man kennt das Product und den Multiplicand und sucht den Multiplicator, d. h. man sucht wie viel Größen (Multiplicator) eine gewisse Anzahl

von Einheiten (Product) ausmacht, wenn man weiß wie viel Einheiten (Multiplicand) in einer dieser Größen enthalten sind, oder kürzer, man sucht wie viel mal eine Zahl in einer andern Zahl enthalten ist. In diesem Falle bezeichnet das Product Einheiten wie der bekannte Factor; der zu suchende Factor bezeichnet Größen von so viel Einheiten als der bekannte Factor anzeigt.

Beispiel. Man will wissen wie viel Wochen in 37 Tagen enthalten sind.

Zweite Art. Man kennt das Product und den Multiplicator und sucht den Multiplicand, d. h. eine bestimmte Zahl von Größen (Multiplicator) enthält eine gewisse Zahl von Einheiten (Product), und man will wissen wie viel Einheiten (Multiplicand) eine jener Größen enthält; in andern Worten, man sucht die Größe (Multiplicand), von denen eine gewisse Zahl (Multiplicator) in einer andern Größe (Product) enthalten ist.

Beispiel. 37 Bilder sollen unter 7 Kinder vertheilt werden, wie viel bekommt eines? In diesem Falle bezeichnet das Product Einheiten, wie der zu suchende Factor; und der bekannte Factor bezeichnet Größen von so viel Einheiten, als der andere Factor anzeigt.

Eine Größe, die zweimal, dreimal, viermal, u. s. w., in einer andern Größe enthalten ist, heißt die **Hälfte**, das **Drittel**, das **Viertel**, u. s. w., dieser andern Größe.

35. (Vergl. 26.) Um zu finden, wie viel Größen von 7 Einheiten in 37 Einheiten enthalten sind, untersuche ich, wie viel mal ich eine Größe von 7 Einheiten von 35 Einheiten abziehen kann.

37 Einheiten
1 Größe von 7 Einheiten abgezogen
bleibt 30 Einheiten;
1 Größe von 7 Einheiten abgezogen
bleibt 23 Einheiten;
1 Größe von 7 Einheiten abgezogen
bleibt 16 Einheiten;
1 Größe von 7 Einheiten abgezogen
bleibt 9 Einheiten;
1 Größe von 7 Einheiten abgezogen
bleibt 2 Einheiten, wovon ich keine Größe von 7 Einheiten mehr abziehen kann.

Also 37 Einheiten = 5 Größen von 7 Einheiten + 2 Einheiten, oder $37=7\times5+2$.

36. Ebenso sind 37 Einheiten = 7 Größen von 5 Einheiten + 2 Einheiten (26), oder $37=5\times7+2$.

Dividirt man also durch den Multiplicator 7 nach der zweiten Art, so erhält man dasselbe Resultat (5 für den andern Factor und 2 im Producte übrigbleibende Einheiten), als wenn man durch den Multiplicand 7 nach der ersten Art dividirt. Da diese Beweisführung sich auf alle Fälle anwenden läßt, so hat man also nicht weiter nöthig die beiden Arten zu unterscheiden. Man nennt darum in beiden Fällen das bekannte Product **Dividend**, den bekannten Factor **Divisor**, den zu suchenden Factor **Quotient**, und **Rest** die Einheiten, um welche der Dividend größer ist als das Product des Divisors mit dem Quotienten, und die keine ganze Größe von der Sorte, wie der Divisor der ersten Divisionsart anzeigt, mehr geben. Ebenso bezeichnet man beide Divisionsarten ohne Unterschied durch das

Zeichen : (sprich „dividirt durch"), das man nach dem Dividenden und vor den Divisor setzt.

Dividend = zu theilende Zahl. Divisor = Theiler. Quotient = Zahl, welche anzeigt wie oft der Divisor im Dividend enthalten ist. Diese Namen sind also der ersten Divisionsart entnommen.

Beide Divisionen, die durch 37 : 7 angezeigt werden, geben also zum Quotienten 5 und lassen einen Rest von 2 Einheiten, was so viel sagen will, als daß $37=7\times5+2=5\times7+2$. Bei einer Division, die keinen Rest läßt, sagt man, der Dividend sei ein exactes Product des Divisors.

37. Das Verfahren von Nr. 35, den Quotienten durch wiederholte Subtractionen des Divisors (Multiplicandes) vom Dividende (Producte) zu finden, ist auf alle Zahlen anwendbar, in ähnlicher Weise wie man das Product bei jeder Multiplication durch die Addition der Multiplicande findet. Und jene Subtractionen bei der Division werden genau, wie diese Additionen bei der Multiplication, abgekürzt indem man 1° vermittelst der pythagoräischen Tabelle 2, 3 bis 9 Größen, und 2° vermittelst des Grundsatzes von Nr. 30, eben so viele Zehner, Hunderte, u. s. w., von Größen mit einem Male zusammenfaßt, und mit einem Male anschreibt zum Behufe der Subtraction, wie dort zum Behufe der Addition.

38. Abkürzung vermittelst der pythagoräischen Tabelle. (Vergl. 28.)

Beispiel. 37 : 7. Die Tabelle zeigt, daß das größte exacte Product von 7, welches 37 enthält, $35=7\times5$ ist. Also rechnet man unmittelbar:

	37	Einheiten
davon 5 Größen von 7 Einheiten =	35	Einheiten abgezogen
bleibt	2	Einheiten.

Also 37 : 7 gibt zum Quotienten 5 und läßt einen Rest von 2 Einheiten.

Anderes Beispiel. 407500 : 58014. Die Tabelle zeigt, daß 5 Zehntausende sich von 40 Zehntausenden 8 mal, 6 Zehntausende sich davon nur 6 mal abziehen lassen. Die abzuziehende Zahl ist aber größer als 5 und kleiner als 6 Zehntausende und mag sich daher wohl 7 mal abziehen lassen.

Davon 7 Größen von 58014 Einh.
(welche ich gleich durch die Multiplication berechne) =

	407500	
	406098	Einh. abgezogen
bleibt	402	Einheiten.

Also 407500 : 58014 gibt zum Quotienten 7 und läßt einen Rest von 402 Einheiten.

Anmerkung. Aus diesem Beispiele sehen wir, wie man durch Vergleich des ungefähren Werthes des Dividendes und Divisors, d. h. durch Vergleich der Ziffern, welche die höchsten Stellen besetzen, den Quotienten findet, wenn der Dividend zwischen dem Divisor und dem Zehnfachen des Divisors (58014 und 580140) enthalten ist. Der geübtere Rechner hätte schneller eingesehen, daß der Divisor, welcher fast 6 Zehntausende enthält, 7 mal im Dividend enthalten sei, da dieser fast 7 mal 6 volle Zehntausend enthält. Aber auch größere Uebung und größere Fertigkeit wird hierbei nicht allezeit vor Irrthum bewahren, da man Dividend und Divisor nur annäherungsweise vergleicht. Um mit Sicherheit zu verfahren, könnte man sich durch aufeinanderfolgende Additionen eine Tabelle der verschiedenen Producte des Divisors multiplizirt durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, anfertigen.

58014×1=58014
58014×2=116028
58014×3=174042 u. s. w.

Hat man etwa viele Divisionen mit demselben Divisor zu machen, so würde sich auch diese Mühe lohnen. Ist dies nicht der Fall, so setzt man sich lieber der Gefahr aus, einen Irrthum zu begehen, den man merken muß und dann verbessern kann. Hat man nämlich irrthümlich den Quotienten zu klein geschätzt, so wird man nach der Subtraction einen Rest behalten, von dem sich der Quotient noch ein oder mehrere Male abziehen läßt. Hat man ihn zu groß angenommen, so wird die Subtraction unmöglich sein, weil der Subtrahend größer sein wird, als der Minuend. (Man gebe die Gründe an und liefere den Nachweis an obigem Beispiel.) Ist die Subtraction möglich und läßt sie einen Rest der kleiner ist, als der Divisor, so ist jedenfalls der Quotient richtig geschätzt.

39. Bei der Multiplication addirt man eine gewisse Zahl von Zehnern, Hunderten, Tausenden, u. s. w., des Multiplicandes, indem man den Multiplicand mit jener Zahl multiplizirt und dieses Product, sogar ohne Hinzufügung von Nullen, einfach so anschreibt, daß dessen letzte Ziffer an der Stelle der Zehner, Hunderte oder Tausende, u. s. w. stehe (vergl. 32); gerade so subtrahirt man eine gewisse Anzahl von Multiplicanden (Divisoren) und von Zehnern, Hunderten, Tausenden, u. s. w. des Multiplicandes bei der Division.

Die einfachste Weise zu dividiren besteht also darin, mit einem Male so viele Multiplicande (Divisoren) abzuziehen, als möglich; also wenn man Tausende abziehen kann, nicht Hunderte oder Zehner des Multiplicandes abzuziehen (wo-

durch man zwar auch dahin käme, allmälig ein oder mehrere Tausende abzuziehen), und ebenso nicht damit anzufangen Tausende abzuziehen, sondern Zehntausende oder Hunderttausende, wenn dies möglich ist, und zwar mit einem Male so viel als möglich.

Beispiel. 10874532800 : 210453. Von dem 1 Zehntausend von Millionen lassen sich keine Zehntausende von Millionen des Divisors abziehen. Von den 10 Tausenden von Millionen ebenfalls keine Tausendmillionen des Divisors, und ebenso von den 108 Hundertmillionen, von den 1087 Zehnmillionen, von den 10874 Millionen, von den 108745 Hunderttausenden keine Hundertmillionen, Zehnmillionen, Millionen oder Hunderttausende des Divisors, wohl aber lassen von den 1087453 Zehntausenden sich Zehntausende des Divisors abziehen und zwar 5 (Vergl. 38). Indem ich diese abziehe und in der angegebenen Weise dieses Verfahren fortsetze, ergibt sich folgende Rechnung:

		10874532800 Einh.
5 Zehntausende v. Größen v. 210453 Einh. =		1052265 Zehnt. abg.
	bleibt	351882800 Einh.
1 Tausend von Größen von 210453 Einh. =		210453 Tauf. abg.
	bleibt	141429800 Einh.
6 Hunderte von Größen von 210453 Einh. =		1262718 Hund. ab.
	bleibt	15158000 Einh.
7 Zehner von Größen von 210453 Einh. =		1473171 Zeh. ab.
	bleibt	426290 Einh.
2 Größen von 210453 Einheiten =		420906 E. abg.
	bleibt	5384

Also gibt 10874532800 : 210453 zum Quotienten 5 Zehntausende + 1 Tausend + 6 Hunderte + 7 Zehner + 2=51672, und läßt einen Rest von 5384 Einheiten.

40. Weitere Abkürzungen. 1) Bei der Subtraction der Zehntausende hatte man nicht nöthig die 4 letzten Ziffern

des Dividends zu berücksichtigen; bei der folgenden Subtraction (der Tausende) könnte man die 3 letzten, bei der dritten Subtraction die 2 letzten und bei der vierten die letzte Ziffer des Dividends unberücksichtigt lassen.

2) Die Division der Zehntausende des Dividends gab die Ziffer der Zehntausende des Quotients; die folgende Division gab die Ziffer der Tausende, u. s. w., bis zur Division der Einer des Dividends, welche die Einer des Quotienten gab. Es folgen also durch dieses Verfahren die verschiedenen Ziffer des Quotienten von der höchsten bis zu den Einern in ihrer natürlichen Ordnung aufeinander; man braucht sie also nur in dieser Ordnung nacheinander anzuschreiben, ohne sich um den Werth einer jeden einzelnen zu kümmern; sobald die Einer angeschrieben sind, ist der ganze Quotient richtig angeschrieben. Man setzt sie gewöhnlich unter den Divisor, zu größerer Bequemlichkeit bei den vorkommenden Multiplicationen. Den Divisor setzt man gewöhnlich rechts vom Dividend und man trennt ihn von diesem durch einen wagerechten, vom Quotienten durch einen senkrechten Strich. Mit Hilfe dieser Abkürzungen stellt sich die Ausrechnung in folgender Weise dar:

```
10874532800 | 210453
1052265     |  51672
 ------
  351882
  210453
  -------
  1414298
  1262718
  -------
   1515800
   1473171
   -------
     426290
     420906
     ------
       5384
```

41. Ist die Zahl der zu dividirenden Tausende des Dividends kleiner als der Divisor, so lassen sich keine Tausende des Divisors davon abziehen; man bezeichnet alsdann die Stelle der Tausende im Divisor durch eine Null und schreitet zur Division der Hunderte. Und im Allgemeinen: ist die Zahl der zu dividirenden Vergleichsgrößen des Dividends kleiner als der Divisor, so bezeichnet man die Vergleichsgrößen dieser Stelle im Divisor durch eine Null und schreitet zur Division der folgenden Stelle.

Beispiel. 21095216530 : 10546 (vergl. Anmerk. zu 32).

```
21095216530 | 10546
21092       | 2000305
-----
   32165
   31638
   -----
     52730
     52730
     -----
         0
```

Von 31 Hunderttausenden lassen sich keine Hunderttausende des Divisors abziehen; ich bezeichne diese Stelle im Divisor durch eine Null. Von 317 Zehntausenden lassen sich ebenfalls keine Zehntausende abziehen; diese Stelle wird also ebenfalls durch eine Null bezeichnet, u. s. w.

42. Aus dem Vorigen ergibt sich für die Division folgende **Regel:** Man faßt zuerst so viele von den ersten Ziffern des Dividends zusammen, (und mag sie von den übrigen durch einen Punkt trennen), als nöthig sind, um eine Zahl zu finden die wenigstens so groß ist als der Divisor[1]) und dividirt diese Zahl durch den Divisor. Den Quotienten dieser Division stellt man

[1]) Also in manchen Fällen ebensoviel Ziffern, als der Divisor hat, in andern eine mehr. Warum?

unter den Divisor, multiplizirt den Divisor mit dieser Ziffer, stellt dieses Product unter die obige Zahl im Dividend und zieht es von dieser ab. Man nimmt dann die folgende Ziffer des Dividends herunter, d. h. man stellt sie rechts von jenem Reste.

Diese neue Zahl wird wie die erste durch den Divisor dividirt; die Ziffer dieses Quotienten rechts neben der ersten Ziffer des Quotienten angeschrieben; der Divisor mit dieser neuen Ziffer multiplizirt; das Product gleich unter obige Zahl angeschrieben und dann davon abgezogen.

In ähnlicher Weise wird die jetzt folgende Ziffer des Dividends heruntergenommen und die Rechnung fortgesetzt, bis man die Einer heruntergenommen und davon subtrahirt hat.

Läßt sich eine dieser Divisionen nicht machen, so schreibt man eine Null an im Quotienten und nimmt gleich die folgende Ziffer herunter. Ebenso verfährt man, wenn sich mehrere aufeinanderfolgende Divisionen nicht machen lassen.

42. Der geübte Rechner wendet noch eine weitere Abkürzung an, welche darin besteht, daß er die einzelnen Producte subtrahirt, ohne dieselben anzuschreiben. Er verfährt dabei in ähnlicher Weise, wie wir in Nr. 23 gezeigt haben.

10874532800	210453
351882	51672
1414298	
1515800	
426290	
5384	

Er spricht: 210453 in 1087453 geht 5 mal, und schreibt die Ziffer 5 an.

5 mal 3 macht 15. Um diese von den Einern des Dividends abziehen zu können, fügt er in Gedanken 20 hinzu, und behält, daß er bei der folgenden Subtraction diese 2 Zehner wieder abzuziehen hat. Also fährt er fort zu sprechen: 15 von 23 bleibt 8, ich behalte 2. Er schreibt dann die 8 unter die 3 und spricht weiter:

5 mal 5 macht 25, und 2 behalten macht 27; von 35 (indem er ebenso 3 Zehner dieser Stelle zum Dividend hinzufügt) bleibt 8 und ich behalte 3.

5 mal 4 macht 20, und 3 behalten macht 23; von 24 bleibt 1 und ich behalte 2.

5 mal 0 macht 0, und 2 behalten macht 2; von 7 bleibt 5.

5 mal 1 macht 5, von 8 bleibt 3.

5 mal 2 macht 10, von 10 geht auf.

43. Endigt der Divisor mit einer oder mehreren Nullen, so genügt es, da dieselben doch zu weiter nichts dienen, als allen Ziffern ihre richtige Stelle zu geben, und diese Stellen sich nach unserm Verfahren von selbst ergeben, wenn man diese Stellen bei dem letzten Producte und bei der letzten Subtraction berücksichtigt.

Beispiel.		Abkürzung.	
15750000	13000	15750000	13000
27500	1211	27	1211
15000		15	
2000		20000	
7000		7000	

Also bei drei Nullen im Divisor verfährt man, als seien sie nicht da, und nimmt die vier letzten Ziffern des Divi-

dends zugleich herunter; bei einer Null im Divisor nähme man die zwei letzten Ziffern mit einander herunter; bei zwei die drei letzten Ziffern, u. s. w.

42. Die **Probe** der Division wird durch ihren Begriff angegeben (34). Man multiplizirt den Divisor mit dem Quotienten und addirt zu diesem Producte den Rest; wenn auf diese Weise der Dividend herauskommt, und nur in diesem Falle, ist die Division richtig.

Wie die Multiplication der Division, so kann auch nach ihrem Begriffe (34) die Division **der Multiplication zur Probe** dienen; die Division des Productes durch einen der Factoren muß zum Quotienten den andern Factor geben.

Wie aber die umgekehrte Multiplication zur Probe der Multiplication dient, so kann auch die Division des Dividendes durch den Quotienten zur **Probe der Division** dienen. Wenn der Rest kleiner war, als der Quotient, so muß alsdann der Divisor herauskommen und die Division denselben Rest geben (34). Wie aber wenn der Rest größer war, als der Divisor; z. B. bei der Division 27 : 7?

Aufgaben.

1. (34—38) Wie oft sind 2 Franken in 21 Franken enthalten? Welche Art von Division hat man hier gemacht?

2. Welche Anzahl von Franken ist 2 mal in 21 enthalten? Welche Art von Division wird hier gemacht?

3. [1]) Was für Rechenaufgaben lassen sich durch die Division lösen? (Vergl. Aufg. 1, 2, 3, 4. Seite 28).

[1]) Bei allen folgenden Aufgaben bis zur 21ten stets die Art der zu machenden Division anzugeben.

4. 25 Schüler sollen 225 Nüsse theilen; wieviel erhält jeder?

5. Welches ist der 25ste Theil von 200?

6. 3000 Centimes werden unter Arme vertheilt; jeder erhält deren 375; wieviel Arme waren es?

7. Wieviel würde jedes Kind erhalten, wenn man 3000 Centimes unter 375 Kinder vertheilen würde?

8. Für 2520 Pfennige erhält man 360 Bilder; was kostet ein Bild?

9. Ein Bild kostet 360 Pfennige; wieviel erhält man für 2520 Pfennige?

10. Welche Zahl ist 225 mal in 2025 enthalten?

11. Wie oft ist 225 enthalten in 2026?

12. 25 Ellen kosten 75 Franken; was kostet 1 Elle?

13. 1 Elle kostet 25 Franken; wieviel Ellen erhält man für 175 Franken?

14. 1320 ist 165 mal so groß als eine andere Zahl; welches ist diese Zahl?

15. Wie oft sind 175 Thaler enthalten in 1050 Thaler?

16. Wieviel mal sind 175 Zehnthalerscheine in 1050 Zehnthalerscheinen enthalten?

17. Wieviel mal sind 175 Fünfthalerscheine in 1050 Fünfthalerscheinen enthalten? (Welchen Schluß kann man aus dem Vergleiche der drei letzten Aufgaben ziehen)?

18. 3000 Centimes werden unter Arme vertheilt; jeder erhält deren 375; wieviel Arme waren es?

19. Wie oft sind 3 Zehner enthalten in 15 Zehnern?

20. — 3 Hunderte — 15 Hunderten?

21. — 3 Tausende — 15 Tausenden?

22. Was macht demnach 150 : 30; 1500 : 300; 15000 : 3000; 8000 : 2000; 1500 : 500; 720 : 90; 840 : 420; 8400 : 4200; 620 : 310; 750 : 250; 7500 : 2500; 75000 : 25000; 7500000 : 2500000; 930000 : 31000.

23. Wie oft ist 2 enthalten in 6, in 8, in 12, in 16? Wie oft demnach in 6+8+12+16?

24. Wie oft ist 5 enthalten in 15, in 25, in 45? Wie oft demnach in 15+25+45?

25. Wie oft ist 10 enthalten in 50, in 60, in 150?

26. Wieviel macht 150 : 3; 1500 : 30; 15000 : 300; 1500 : 3; 15000 : 30; 15000 : 3?

27. Wie oft ist 6 enthalten in 6000; in 300; in 90; in 6? Wie oft demnach in 6000+300+90+6? Wieviel macht 6396 : 6?

28. Wie oft ist 7 enthalten in 14000; in 3500; in 490; in 63? Wie oft demnach in 14000+3500+490+63=18053?

29. Wie oft ist 25 enthalten in 250000; in 25000; in 1250; in 125? Wie oft demnach in 250000+25000+1250+125=276375?

30. Das Sechsfache einer Zahl beträgt 2346; wie groß ist diese Zahl?

31. Wieviel macht 108 : 2; 108 : 3; 108 : 4; 108 : 6; 108 : 9.

32. Wieviel macht 90 : 5; 102 : 6; 301 : 7; 123456 : 8; 111111111 : 9; 99 : 11; 123456 : 12; 702 : 13; 10010 : 14; 1005 : 15; 256 : 16; 6001 : 17; 702 : 18; 399 : 19?

33. (40). Wieviel macht 9999 : 11; 1008 : 2; 1830 : 6; 32032 : 16; 350035 : 7; 5007525 : 25.

34. (42). Wieviel macht 25000 : 5; 3600 : 12; 180000 : 36; 180000 : 360; 25000 : 50; 1440000 : 12; 144000 : 120?

35. Man dividire 108 durch jede der 9 ersten Zahlen. Wieviele von diesen Divisionen lassen keinen Rest?

36. Man dividire 1008 durch jede der 28 ersten ganzen Zahlen? Welche von diesen Divisionen lassen keinen Rest?

37. Wieviel Franken sind 8260 Sous? 7856 Silbgr.? 6552 Kreuzer? 234500 Centimes? 2976 Pfennige? 1 Franken=20 Sous=8 Sgr. =28 Kr.=100 Centimes=96 Pfennig?

38. Wieviel Centimes macht 1 Sous? Wieviel Pfennige sind in einem Silbergroschen? (Mit Hilfe obiger Angaben.)

39. 1 Thaler=30 Slbgr. Wieviel Thaler sind in 24750 Slbgr.?

40. Wieviel Silbergr. macht 15 Franken? Wieviel Thaler? Wieviel Kreuzer? Wieviel Kreuzer gehen demnach auf einen Thaler?

41. 1 rheinischer Gulden = 60 Kreuzer. Wieviel rhein. Gulden sind demnach in 780 Kreuzer; wieviel Kreuzer machen 15 Franken? wieviel Gulden?

42. Ein österreichischer Gulden = 250 Centimes. Wieviel Centimes in 15 Franken? wieviel österreichische Gulden?

43. Wieviel Tage sind in 96, 240, 360 Stunden?

44. Wieviel Wochen sind in 365 Tagen?

45. Ein Garten hat 252 Bäume in lauter gleichen Reihen von 12 Bäumen; wieviel Reihen?

46. Wieviel Tage, Stunden und Minuten macht eine Million Stunden?

47. Wenn man in einer Sekunde 5 zählen würde, wieviel Sekunden bräuchte man um eine Billion (1000000000000) zu zählen? wieviel Minuten (1 Minute=60 Sekunden)? wieviel Stunden (1 Stunde = 60 Minuten)? wieviel Tage? wieviel Jahre (das Jahr zu 365 Tagen)?

48. Ein Stück Leinwand von 74 Ellen kostet 37 Franken. Wieviel Centimes kostet das ganze Stük? wieviel Cent. kostet 1 Elle? wieviel kosten demnach 24 Ellen? wieviel Franken macht das?

49. Ein Sack Salz von 200 Pfund kostet 30 Franken. Was kosten 60 Pfund? (In ähnlicher Weise zu berechnen wie bei der vorigen Aufgabe.)

50. Wenn Jemand täglich 7 Silbergroschen ausgibt, so kommt er mit seinem Gelde 180 Tage aus. Wieviel Geld hat er? wie lange käme er aus, wenn er täglich nur 6 Silbergroschen ausgäbe?

51. 12 Personen bestellen 10 Portionen Essen. Jede Portion kostet 24 Sous; was muß jede Person bezahlen?

52. Jemand geht von Luxemburg nach Brüssel in 8 Tagen, wenn er täglich 6 Stunden geht; er soll aber ankommen in 6 Tagen; wieviel Stunden muß er täglich gehen?

53. Eine Division ergab zum Quotienten 45 und ließ keinen Rest; welchen Quotienten hätte sie gegeben:

a) wenn der Dividend 5 mal so groß gewesen wäre, als er wirklich war?

b) wenn er nur der fünfte Theil gewesen wäre, von dem was er wirklich war?

c) wenn der Divisor 5 mal so groß gewesen wäre, als er wirklich war?

d) wenn der Divisor nur den fünften Theil seines wirklichen Werthes betragen hätte?

e) wenn Dividend und Divisor zugleich 5 mal so groß gewesen wären, als sie wirklich waren?

f) wenn beide den fünften Theil ihres wirklichen Werthes betragen hätten?

54. Eine andere Division gab zum Quotienten 45 und ließ einen Rest von 10 Einheiten; welche Verminderung hätte unter denselben Umständen, wie oben, der Quotient und der Rest erlitten?

NB. Beispiele für diese sechs Fälle anzuführen.

Aufgaben über die vier Rechnungsarten.

1. Wieviel Einwohner zählen a) die deutschen Länder Österreichs b) die andern Länder Österreichs c) der ganze österreichische Staat d) die deutschen Länder Preußens e) die andern Länder Preußens f) der ganze preußische Staat g) die westliche Gruppe der andern Länder Deutschlands h) die nördliche Gruppe i) die mittlere Gruppe k) die südliche Gruppe l) alle Länder Deutschlands?

Bestandtheile	Flächeninhalt	Einwohnerzahl.
Der österreichische Staat.		
Deutsche Länder.		
Erzherzogth. Österreich	579,3 □ Meilen.	2414000 Einwohner.
Herzogthum Salzburg	130,4	149000
„ Steyermark	408,8	1071000
Gef. Graf. Tirol. u. Vorarlb.	522,9	870000
Königreich Böhmen	944	4720000
Markgrafsch. Mähren	403,8	1879000
Herzth. Schlesien	93,6	447000
„ Käruthen	188,8	333000
„ Krain	181,4	457000
M. Istrien &c. (Litorale.)	144,9	540000
Polnische Länder	1610,2	5080000
Ungarische Länder	4752,5	11660000
Großf. **Siebenbürgen**	1103	2180000
Kgr. Venetien	456,5	2445000
Kgr. Dalmatien	232,4	416000
Das in diesen Zahlen nicht mitbegriffene Militär beträgt		300000 Mann.
Der preußische Staat. — Provinzen in Deutschland.		
Kurfürstent. Brandenburg	734,1 □ Meilen.	2254000
Herzogthum Pommern	576,7	1289000
Herzogth. Sachsen	460,6	1862000

Herzogth. Schlesien	741,7 □ Meilen	3182000
Westphalen	368	1572000
Rheinprovinz	487	3109000
Hohenzollern	21,44	64000

Provinzen außer Deutschland.

Kgr. Preußen	1178	2744000
Großherzogth. Posen	536,5	1393000

Westliche Gruppe der andern Länder Deutschlands.

Großherzogthum Hessen	153 □ Meilen.	855000
Kurfürstenthum Hessen	200	755000
Landgrafsch. Hessen-Homburg	5	25000
Herzogthum Nassau	86½	439000
Großherzogthum Luxemburg	47	202300
Provinz Limburg	42	191700
Freie Stadt Frankfurt	1¾	79000
Fürstenthum Waldeck	21½	59700
Fürstenth. Lippe-Detmold	22½	106600
— Lippe-Schaumburg	6½	31800

Nördliche Gruppe.

Hzgth. Anhalt-Dessau-Köthen	27	119000
— Anhalt-Bernburg	14	50000
Großh. Mecklenburg-Schwerin	225½	543000
— Mecklenburg-Strelitz	49½	99000
Königreich Hannover	698½	1844000
Herzogthum Braunschweig	69	273000
Großherzogthum Oldenburg	116½	294000
Holstein und Lauenburg	186	573000
Freie Stadt Hamburg	6½	222000
— Lübeck	5¼	55000
— Bremen	4½	88800

Mittlere Gruppe.

Königreich Sachsen	217½	2122000
G. Sachsen-Weimar-Eisenach	64½	267000
H.S.-Meiningen-Hildburghausen	42½	169000
Hrzgth. Sachsen-Altenburg	24½	135000

Hrzgth. S.-Koburg-Gotha	$34\frac{1}{2}$	☐ Meilen.	154000
F. Schwarzburg-Sondershausen	$15\frac{1}{2}$		74000
— Rudolstadt	$15\frac{1}{2}$		70000
— Reuß (ältere Linie)	6		39000
— — (jüngere Linie)	$15\frac{1}{2}$		81000

Südliche Gruppe.

Königreich Bayern	1394		4616000
— Würtemberg	355		1691000
Großherzogthum Baden	$275\frac{1}{2}$		1336000
Fürstenthum Liechtenstein	$2\frac{1}{2}$		7000

2. Wieviel Einwohner wohnen auf einer ☐ Meile? a) im Königreich Böhmen, b) im Kurfürstenthum Hessen, c) in der Landgrafschaft Hessen-Homburg, d) im Herzogthum Anhalt-Bernburg, e) im Fürstenthum Reuß (ältere Linie)?

3. Wieviel hat der preußische Staat mehr Einwohner im deutschen Bunde, als Österreich? Wieviel Einwohner hat der österreichische Staat mehr als der preußische?

4. Die alte Welt besteht aus Asien, Europa und Afrika, die neue aus Amerika und Australien. Der Flächenraum von Asien beträgt 883000 ☐ Meilen; der von Europa = 168000 ☐ M.; der von Afrika = 545000; der von Amerika = 668000; der von Australien = 160000. Wie groß ist die alte? die neue Welt? die ganze Fläche des Landes auf der Erde?

5. Das Weltmeer wird in fünf Ozeane eingetheilt, nämlich den großen Ozean mit 3300000 ☐ Meilen, den atlantischen Ozean mit 1626000 ☐ Meilen, den indischen Ozean mit 1380000, das südliche Eismeer mit 350000 und das nördliche Eismeer mit 200000 ☐ M. Wie groß ist die Meeresfläche auf der Erde?

6. Wie groß ist nach obigen Angaben die ganze Oberfläche der Erde?

7. Man nimmt an, daß in Asien 755 Millionen, in Europa 272 Millionen, in Afrika 200 M., in Amerika 65 Millionen und in Australien 2 M. Menschen wohnen. Wieviel wohnen im Durchschnitt in jedem Welttheil auf einer ☐ Meile?

8. Karl der Große bestieg den Thron i. J. 768, und regierte 46 Jahre. In welchem Jahre starb er?

9. Rom wurde i. J. 754 vor Christus gegründet; wie lange stand diese Stadt i. J. 1864 nach Chr.?

10. Die Luxemburg-Trierer-Eisenbahn wurde eröffnet i. J. 1860; nach 99 soll sie Eigenthum des Staates werden; wann wird das geschehen?

11. Justinian regierte von 527—565. Wie lange dauerte seine Regierungszeit?

12. Kaiser Augustus regierte von 30 vor Chr. bis 10 n. Chr. wie lange dauerte seine Regierungszeit?

13. Welche Zahl muß man von 235708 abziehen, um 56097 als Rest zu bekommen?

14. Der dreißigjährige Krieg endigte 1648; in welchem Jahre fing er an?

15. Die Türken fangen ihre Jahre an zu zählen von 622; welches ist ihre Jahreszahl im Jahre 1864?

16. **A** hat 25 Nüsse, **B** hat 54, **C** soviel als **A** und **B** zusammen, **D** 12 mehr als **C**; sie schenken alle ihre Nüsse dem **E**, der deren schon 15 besaß. Wieviel hat jetzt **E**?

17. Fritz ist 25 Monate jünger als Paul, und 10 Monate älter als Carl, der 103 Monate alt ist; wie alt ist Paul?

18. In der ersten Classe einer Schule sind 15, in der zweiten 24, in der dritten 35 Schüler; wieviel Bilder muß der Lehrer kaufen, wenn er jedem Schüler eines geben und deren noch 40 behalten will?

19. Der Thurm der Liebfrauenkirche von Paris ist 66 Meter hoch und 16 Meter niedriger als der des Domes von Rheims. Die Kuppel der Paulskirche in London ist 28 Meter höher als der Dom von Rheims und 4 Meter niedriger als der Thurm des Domes von Mecheln; letzterer ist 7 Meter niedriger als die Thurmspitze von Metz, welche 1 Meter höher ist als die von Antwerpen. Diese ist 12 Meter niedriger als die Kuppel der Peterskirche in Rom, welche 10 Meter niedriger ist, als die Thurmspitze von Straßburg. Die Thurmspitze von Beauvais war so hoch, als die höchste Pyramide und 4 Meter höher als die Thurmspitze von Straßburg. Wie hoch ist die höchste Pyramide?

20. Im Jahre 1864 stand Rom 2618 Jahre; in welchem Jahre wurde es gegründet?

21. Man hat eine Zahl mit 63 multiplizirt und zum Product 3339 erhalten. Man hat aber eine 5, die im Multiplicande vorkam, für eine 3 gehalten; wieviel macht das richtige Product?

22. In einem Korbe sind 24 Aepfel weniger, als in einem andern; in beiden sind zusammen 10 Dutzend Aepfel. Wieviel sind in jedem Korbe?

23. Wenn ein Kriegsschiff ersten Ranges mit 110, ein Schiff zweiten Ranges mit 84 und eine Fregatte mit 50 Kanonen bewaffnet ist, wieviel zählt deren eine Schwadron, die aus 5 Schiffen ersten Ranges, 8 zweiten Ranges und 6 Fregatten besteht?

24. Das Mittelalter dauerte von 476 bis 1517 nach Chr. Wieviel Jahre umfaßt dieser Zeitraum?

25. Der erste sächsische Kaiser, Heinrich I., regierte von 919—936; Otto I. von 963—973; Otto II. von 973—983; Otto III. von 983—1002; der hl. Heinrich II., der letzte sächsische Kaiser, von 1002—1024. Wie lange dauerte die Regierung eines jeden und die Periode der sächsischen Kaiser?

26. Der Schall geht in einer Secunde ungefähr 1040 Fuß. Die Verbreitung des Lichtes geschieht so schnell, daß sie im Vergleiche zu der des Schalles als augenblicklich angesehen werden muß. Wenn man nun den Donner hört 17 Secunden, nachdem man den Blitz gesehen hat, wieviele Fuß ist alsdann das Gewitter entfernt?

27. Man will wissen wieviel Kanonenkugeln auf einem Haufen liegen. Unten liegen 6 Reihen von 13 Kugeln; auf diesen 5 Reihen von 12; auf letztern 4 Reihen von 11, u. s. w. Jede höhere Schichte hat eine Reihe weniger und eine Kugel weniger in jeder Reihe.

28. Zwei Personen haben zusammen 152 Franken; hätte die erste 10 Franken mehr und die zweite 24 Franken weniger, so hätten sie gleich viel. Wieviel hat jede?

29. Ein Wirth verkauft ein Fuder Wein (= 960 Liter) zu 65 Centimes den Liter mit einem Gewinn von 45 Centimes. Wie theuer hat er das Fuder gekauft?

30. Ein sterbender Vater hinterläßt drei Söhnen und einer Tochter 39500 Franken. Der älteste Sohn erhält 10500 Franken; der dritte erhält 1000 Franken weniger als der älteste und der zweite erhält 500 Franken mehr als die Schwester; wieviel erhält jeder?

31. Hätte Carl 3 mal so viel, als er hat, und noch 40 Franken, so könnte er eine Schuld von 100 Franken bezahlen; wieviel hat er?

32. Ein Landmann beschäftigte in einem Jahre 12 Taglöhner 85 Tage lang; wie groß war die Fläche, welche sie bearbeiteten? Man nimmt an, daß mit der Bestellung eines Hektare ein Mann im Jahre 20 Tage lang zu thun hat.

33. Ein Ackersmann pachtet ein Landgut von 10 Hektares Ackerland und 3 Hektares Wiese. Für den Are Ackerland bezahlt er jährlich 50 Franken und für den Are Wiese 100 Franken. Ferner bezahlt er die Steuern, welche den 20ten Theil des Ertrages betragen, und die nöthigen Ausbesserungen, welche auf 50 Fr. jährlich angeschlagen werden können. Dann muß er dem Eigenthümer jährlich 2 Tage mit einem Fuhrwerke zu Diensten stehen, was er mit 6 Franken per Tag berechnen würde. Zur Bestellung eines Hektare Ackerland verausgabt er jährlich 171 Franken, und zur Bestellung eines Hektare Wiese 38 Franken. Nach 9 Jahren hatte das Gut ihm im Ganzen 25320 Franken eingebracht. Welches war der Reinertrag desselben?

34. Wenn Heinrich ein Dutzend Pfirsische kaufen wollte, behielte er von seinem Gelde noch 28 Centimes übrig; um zwei Dutzend zu kaufen, fehlen ihm noch 44 Centimes. Wieviel Geld hat er, und was kostet ein Pfirsisch?

35. Man hat Tuch gekauft von 15 Franken den Meter und gerade so viel Ellen Musseline von 3 Franken, und 360 Franken ausgegeben. Wieviel hat man Ellen gekauft?

36. Ein Arbeiter, der täglich 8 Stunden arbeitete, erhielt für eine Arbeit von 24 Tagen 96 Franken; wieviel Sous verdient er in der Stunde?

37. Hätte N außer dem, was er hat, noch 4 mal soviel und 125 Franken, so hätte er 2300 Franken. Wieviel hat er?

38. Man soll 1800 in drei Theile theilen, so daß der erste Theil 45 mehr betrage als der zweite, und der zweite 45 mehr als der dritte.

39. Hätte ich 234 Franken mehr, so hätte ich 10 mal soviel, als ich habe; wieviel habe ich?

40. Hättest du noch 125 Franken, so hättest du soviel als ich; hättest du noch 300, so hättest du zwei mal soviel als ich. Wieviel hat jeder?

41. Bei einer Division betrugen der Dividend und der Divisor zusammen 12345; der Quotient war 100 und der Rest 45. Welches war der Divident?

42. 30 Meter blaues und 40 Meter schwarzes Tuch kosten zusammen 660 Franken. Das schwarze ist doppelt so theuer, als das blaue. Was kostet die Elle eines jeden?

43. Jemand, der 2500 Franken jährlicher Einkünfte besitzt, hat eine Schuld von 14050 Franken, die er in 10 Jahren bezahlen will. Wieviel kann er täglich verzehren? (Das Jahr zu 365 Tagen.)

44. Man will Geld unter 15 Arme vertheilen. Da aber drei nicht kamen, erhielt jeder der übrigen 5 Sous mehr. Wieviel Geld wurde vertheilt?

45. **A** hat 16 Franken mehr als **B** und zusammen haben sie 100 Franken; wieviel hat Jeder?

46. Peter und Paul besitzen zusammen 2145 Franken; Paul besitzt 365 Franken mehr als Peter. Wieviel hat Jeder?

47. Man hat 125 Ellen Leinwand, zu 25 Sous die Elle, bezahlt mit 5 Säcken, die jeder eine gleiche Anzahl von Sous enthielten. Wieviel war in jedem Sack?

48. Die 6 Schüler einer Klasse sollen 4 Dutzend Aepfel so vertheilen, daß jeder, der einen bessern Platz hat, 2 mehr bekomme, als der auf ihn folgende. Wieviel erhält der erste?

49. **A**, **B**, **C**, **D** theilen Nüsse. Aus dem ersten Körbchen bekommt jeder gleichviel; aus dem zweiten, das 100 Stück mehr enthält, bekommt **A** 2 mal, **B** 3 mal, **C** 4 mal und **D** 5 mal so viel als aus dem ersten. Jetzt sind die beiden Körbchen leer; wieviele Nüsse enthielten sie?

50. Ein Pferd, ein Garten und ein Haus kosten zusammen 10000 Franken. Der Garten kostet 4 mal soviel, als das Pferd, und das Haus 5 mal soviel, als der Garten. Was kostet jedes?

51. Die Arbeiter einer ersten Abtheilung erhalten 325 Franken Lohn; die einer zweiten 468 Franken. Jeder erhält gleichviel, und in der zweiten Abtheilung sind 11 Arbeiter mehr als in der ersten. Aus wieviel Arbeitern besteht jede Abtheilung und wieviel erhält einer?

52. **A** und **B** erhalten zusammen 185 Franken, und **A** hatte 25.

und B 20 Tage gearbeitet. Ein andermal hatte A 30 und B ebenfalls 20 Tage gearbeitet, und sie erhielten zusammen 210 Franken. Wieviel verdient Jeder täglich?

53. A und B erhalten zusammen 185 Franken; A hatte 25 und B 20 Tage gearbeitet. Ein andermal hatte A 30 und B 15 Tage gearbeitet, und sie erhielten zusammen 195 Franken. Wieviel verdient Jeder täglich?

54. Ein Vater hat 6 Kinder; jedes ist 2 Jahre älter als das folgende; das älteste aber 3 mal so alt als das jüngste. Wie alt ist dieses?

55. Gebe ich dem Karl 35 Nüsse, so hat er deren 2 mal soviel als Fritz; gebe ich diese 35 Nüsse aber dem Fritz, so hat dieser 4 mal soviel als Karl. Wieviel Nüsse hat Jeder?

56. Zwei Eilboten reisen zugleich von Paris und Lyon ab, um einander entgegenzugehen. Der erste macht in einer Stunde Zeit 2, der andere 3 Stunden Weges; nach wieviel Stunden und in welcher Entfernung von Paris begegnen sich dieselben? Man weiß, daß Paris 100 Stunden von Lyon entfernt ist.

57. 33 Centner einer Waare kosten 1188 Franken; was kostet a) 1 Centner, b) 25 Centner?

58. 25 Centner einer Waare kosten 900 Franken; was kostet a) 1 Centner, b) 33 Centner?

Rechnungen mit zusammengesetzten Zahlen.

45. Die Grundsätze, nach welchen die Rechnungen mit Zahlen, die aus Einern, Zehnern, Hunderten, Tausenden, u. s. w. bestehen, gemacht werden, lassen sich auch auf Zahlen anwenden, die aus mehreren Größen bestehen, wovon aber nicht die eine einen Zehner der andern bildet. Man nennt solche Zahlen **zusammengesetzte Zahlen.** (Eine solche ist z. B. eine Zeit von 3 Wochen, 5 Tagen, 6 Stunden; oder eine Summe von 4 Thlr., 7 Sgr., 8 Pf.) Einige Beispiele mögen dazu dienen jene Grundsätze und ihre Anwendbarkeit auf zusammengesetzte Zahlen deutlicher zu machen.

46. Bei der **Addition und Subtraction** stellt man die zu addirenden oder zu subtrahirenden Zahlen so untereinander, daß die Größen derselben Art in eine senkrechte Reihe zu stehen kommen; dann beginnt man mit der Addition und Subtraction der Größen von der kleinsten Art. (Vergl. 17. 21.)

Beispiel der Addition.						
	12 Thlr.		20 Sgr.		9 Pf.	
	8	—	15	—	6	—
	105	—	25	—	8	—
	20	—	5	—	10	—
	147	—	7	—	9	—

Im Ganzen habe 33 Pfennige. Durch die Division finde ich, daß 12 Pf. oder 1 Sgr. darin 2 mal enthalten sind, und 9 Pfennige bleiben[1]). Ich schreibe also die 7 Pf. und behalte die 2 Sgr., d. h. ich addire sie zu den Silbergroschen. Die Summe der Silbergroschen mit jenen 2 behaltenen ist 67; dies macht (da 1 Thlr. = 30 Sgr.) 2 Thlr. 7 Sgr. Diese 7 Sgr. schreibe ich an und behalte die 2 Thlr. Die Summe der Thaler mit den 2 behaltenen ist 147; die Summe des Ganzen also 147 Thlr., 7 Sgr., 7 Pf.

47. Beisp. der Subtraction.						
	100 Thlr.		0 Sgr.		6 Pf.	
	50	—	8	—	9	—
	49	—	21	—	9	—

Da der Subtrahend mehr Pfennige enthält, als der Minuend, so fügt man in Gedanken 12 Pfennige zum Minuend und zieht hernach 1 Silbergroschen mehr ab (Vgl. 23), den man in Gedanken behält, und spricht: 9 Pfennige von 12+6 oder 18, bleiben 9 Pfennige. Ebenso muß man im vorliegenden Falle verfahren mit den Silbergroschen. Man

[1]) Man hätte auch auf folgende Art addiren können: 9+6 Pf.= 1 Sgr. 3 Pf.; 1 Sgr. 3 Pf.+8 Pf.=1 Sgr. 11 Pf.; 1 Sgr. 11 Pf.+10 Pf. = 2 Sgr. 9 Pf.

fügt in Gedanken einen Thaler = 30 Silbergroschen zu denen des Minuends und behält den Thaler, um ihn hernach abzuziehen. 8 Sgr. + 1 Sgr. (der behaltene) = 9 Sgr.; von 30 Sgr. bleiben 21 Sgr. 50 Thlr. + 1 Thlr. (der behaltene) von 100 Thlr. bleiben 49 Thlr.

48. Bei der **Multiplication** (Vergl. 28) fängt man ebenfalls mit den kleinsten Größen an.

Beispiel.	2 Thlr.	15 Sgr.	9 Pf.
			30
	75 —	22 —	6 —

30 Pf. ×9=270 Pf. = 22 Sgr. + 6 Pf.; davon schreibe ich die 6 Pf. an und behalte die 22 Sgr.

15 Sgr. × 30=450 Sgr. Fügt man dazu die 22 behaltenen, so erhält man 472 Sgr. = 15 Thlr. + 22 Sgr.[1]); davon schreibe ich die 22 Sgr. an und behalte die 15 Thlr. 2 Thlr. × 30 = 60 Thlr.; außer diesen enthält das Product die 15 behaltenen, also 75 Thlr.

49. Bei der **Division** fängt man mit der Division der höchsten Größen an (Vergl. 42). Beisp. Der 30te Theil von

75 Thlr.	22 Sgr.	6 Pf.	30
60			2 Thl. 15 Sgr. 9 Pf.
15 ×	172	270	
30 =	150	270	
450 +	22 ×	0	
22 =	12 =		
472	44		
30	22		
172	264 +		
	6 =		

[1]) In diesem Falle hätte man einfacher sagen können: 15 Sgr. × 30=30 Sgr. × 15=1 Thlr. × 15=15 Thlr. Ich habe also bloß die behaltenen 22 Sgr. anzuschreiben und die 15 Thlr. zu behalten.

Die Zahl von Thalern, die ich 30 mal nehmen muß, um 75 Thlr. zu erhalten, sind 2 Thlr.; dies gibt aber bloß 60 Thlr.; es bleiben also 15 Thaler oder 15×30=450 Sgr. zu dividiren. Hiezu füge ich die 22 des Dividends und finde durch eine neue Division, daß die Anzahl von Silbergroschen, die ich 30 mal nehmen muß, um 472 Sgr. zu erhalten, 15 beträgt[1]). Dies gibt aber nur 450 Sgr.; es bleiben also 22 Sgr. = 12×22 Pf. = 264 Pf. zu dividiren, nebst den 6 Pf. des Dividends; im Ganzen also 270 Pf. Durch eine dritte (theilw.) Division finde ich, daß die Zahl von Pfennigen, die man 30 mal zu nehmen hat, um 270 Pf. zu erhalten = 9 ist. Die Division geht ohne Rest auf.

Hätte man zu suchen gehabt, wie oft 2 Thlr. 15 Sgr. 9 Pf. in 75 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. enthalten wären, so hätte man am besten gethan, wenn man alles in Pf. verwandelt hätte. 75 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. : 2 Thlr. 15 Sgr. 9 Pf. =27270 Pf. : 909 Pf. = 30.

50. Proben, wie bei den einfachen ganzen Zahlen.

Aufgaben.

1. Die Araber hatten 781 Jahre, 2 Monate, 16 Tage nach der Schlacht bei Xeres (i. J. 711, den 26. Juli d. h. 710 Jahre 6 Monate 26 Tage nach Chr. Geburt) über Spanien geherrscht, als Ferdinand der Katholische ihr Reich zerstörte; wann?

N.B. Wenn man einen Monat in Tage oder Tage in einen Monat verwandelt, so hat man Acht zu geben, wieviel Tage der betreffende Monat zählt. Im Handel nimmt man immer 30 Tage für einen Monat.

2. 3 Jahre 1 Monat nach dem Auszuge der Kreuzfahrer aus der

[1]) Wie bei der Multiplication hätte man diese besondere Rechnung abkürzen können, indem man gleich gesagt hätte 15 Thlr. : 30 =30×15 Sgr. : 30=15 Sgr. Es bleiben also bloß die 22 Sgr. des Dividends noch zu dividiren.

Burg Gottfried's von Bouillon (1096 den 15. August), eroberten sie Jerusalem; wann?

3. Der Friedenscongreß zu Münster trat zusammen 1643, den 11. Juni; 5 Jahre, 3 Monate und 13 Tage später proclamirte er den westphälischen Frieden; wann?

4. Prinz Eugen war geboren 1663, den 18. October, und wurde 72 Jahre, 6 Monate, 3 Tage alt; wann starb er?

5. Unser glorreich regierende Papst, Pius IX., wurde geboren den 13. Mai 1792; er wurde zum Papste gewählt den 16. Juni 1846; er proclamirte das Dogma der unbefleckten Empfängniß den 8. Dezember 1854. a) Wie alt war er, als er zum Papst gewählt wurde? b) wie alt ist er jetzt? c) wie lange hat er bereits regiert? d) wie lange ist jenes Dogma verkündet?

6. Wenn ein Courrier in jeder Stunde 1 Meile machte, wieviel Jahre, Tage, Stunden, brauchte er, um bei mittlerm Abstand auf den Mond (51835 Meilen) und auf die Sonne (20630754 Meilen) zu gelangen; das Jahr zu 365 Tagen berechnet?

7. Das Sonnenjahr beträgt ziemlich genau 5 Stunden, 48 Minuten, 51 Secunden mehr, als ein gewöhnliches Jahr von 365 Tagen; wieviel Tage macht das in einem Jahrhundert, oder wieviel Schalttage sind in einem Jahrhundert einzuschalten?

8. Folgende Nota auszurechnen.

Herr N. schuldet an die Spezereihandlung von A. S.:

1865.		Thlr	Sgr	Pf.	Thlr	Sgr	Pf.
Januar 15.	2 Quart Baumöl, das Quart à		16	6			
Februar 2.	5 ℔ Stearinkerzen, das ℔ à		13	3			
Februar 10.	10 Quart Petroleum, das Quart à . . .		7	4			
März 7.	Ein Hut Zucker von 21 ℔, das ℔ à . . .		8	2			
— 8.	2 ℔ Salz, das ℔ à .		1	3			
— 20.	5 ℔ Kaffee, das ℔ à .		7	6			
	Total. . .						
März 1.	Auf Abschlag empfangen Bleibt. . .					4	15

9. Ein rheinischer Gulden = 60 Kreuzer; 1 Kreuzer = 4 Pfennig; 7 rhein. Gulden = 4 Thaler. Wieviel Gulden und Kreuzer macht 1 Thaler? Wieviel Kreuzer und Pfennige macht 1 Silbergroschen?

10. Ein österreichischer Florin = 100 Neukreuzer; 3 öster. Florins = 2 Thaler. Wieviel macht ein Thaler in österreichischer Münze? Wieviel 1 Silbergroschen? Wieviel 8 Silbergroschen oder 1 Franken?

11. 1 Pfund Sterling = 20 Shilling; 1 Shilling = 12 Pence. Wieviel macht 1 Pf. Sterl., 15 Shil., 6 P. + 3 Pf. St., = 8 Shil., 9 P. + 5 Pf. Sterl. 3 Shil. — 4 Pf. Sterl., 18 Shil., 10 Pence?

12. Ein Zentner Zollvereinsgewicht = 100 Pfd.; 1 Pfd. = 30 Loth; 2 Pfd. = 1 Kilogramm. Wieviel Kilogramm macht 12 Pfund, 10 Loth + 3 Pfund, 15 Loth — 7 Pfund, 8 Loth + 5 Pfund, 13 Loth?

13. Ein Fuder = 6 Ohm; 1 Ohm = 4 Hotten; 1 Hotte = 40 Liter. Ein Wirth verkauft den Liter Wein zu 80 Centimes und gewinnt auf dem Fuder Wein 358 Franken; wieviel hat ihn das Fuder gekostet?

14. Wie groß ist der Unterschied zwischen 1 Fuder und 1 Kiloliter = 1000 Liter?

15. Von 200 Ballen Schreibpapier sind verkauft und verbraucht worden: 30 Ballen, 5 Ries, 6 Buch, 20 Bogen; 7 Ballen 3 Ries; 1 Ries, 2 Buch, 15 Bogen; 50 Ballen, 10 Buch; 10 Ballen, 8 Ries, 5 Buch; 12 Ries, 4 Buch, 12 Bogen; 6 Buch, 8 Bogen; 10 Ries und 18 Bogen. Wieviel bleiben übrig? 1 Ballen Papier = 10 Ries; 1 Ries = 20 Buch; 1 Buch = 24 Bogen Schreib- oder 25 Bogen Druckpapier. Wieviel bleiben übrig, wenn es Druckpapier war?

16. Die Peripherie eines Kreises (Kreislinie) wird eingetheilt in 360 Grade = 360°; 1° = 60 Minuten = 60'; 1' = 60 Secunden = 60". Wie groß ist der eine Theil einer Kreislinie, wenn der andere 100° 12' 45" beträgt?

17. Die Sonne beschreibt jeden Tag einen Kreis um die Erde in der Richtung von Osten nach Westen. Wieviel Grade und Minuten

dieses Kreises beschreibt sie a) in einer Stunde, b) in einer Minute? und wieviel Zeit braucht sie um c) einen Grad, d) eine Minute, e) eine Secunde dieses Kreises zu beschreiben?

18. An einem Ort, der so viele Grade östlicher liegt, oder dessen östliche Länge um so viele Grade größer ist, als die Sonne in einer Stunde oder Minute beschreibt, ist es eine Stunde oder eine Minute früher Mittag. Jerusalem hat 53° öst. L.; Rom hat 30° öst. L.; Petersburg hat 48° 58′ öst. L.; Wien hat 34° öst. L.; Berlin hat 31° öst. L.; Paris hat 20° öst. L.; Cöln hat 24° 37′ öst. L.; Luxemburg hat 23° 49′ öst. L. Wieviel Uhr ist es in diesen Städten, wenn es in Luxemburg Mittag ist; und wieviel Uhr ist es in Luxemburg, wenn es in jenen Städten Mittag ist.

19. Paris und Carcassone liegen auf demselben Meridian; Paris liegt 13° 51′ nördlich vom Aequator (nördlicher Breite) und Carcassone liegt 43° 13′ nördlich vom Aequator). a) Wieviel liegt Paris nördlicher? b) 90° des Meridians sind 10 Millionen Meter; wieviel Meter ist Paris von Carcassone entfernt?

20. Die Pole liegen 90° Grad vom Aequator; die Wendekreise 23° 28′; ebensoweit müssen die Polarkreise von den Polen entfernt sein; wie weit sind sie vom Aequator entfernt?

21. Die Winkel mißt man mit Kreislinien. Ein rechter Winkel = 90°. Die Summe der Winkel jedes Dreiecks macht 2 rechte Winkel; wie groß ist der dritte Winkel eines Dreiecks, wenn der erste 45° 15′, der zweite 95° 12′ 5″ beträgt?

22. Die Summe der Winkel eines Vielecks findet man, wenn man 2 von der Zahl der Seiten des Vielecks abzieht, und die übrigbleibende Zahl mit 2 multiplizirt. Dieses Product bezeichnet in rechten Winkeln die Summe der Winkel. Wie groß ist ein Winkel eines regelmäßigen Dreiecks, Vierecks, Fünfeckes, Sechseckes und Achteckes? In einem regelmäßigen Vieleck sind die verschiedenen Seiten und Winkel einander gleich.

Producte mehrerer Zahlen.

51. 3 Größen, von denen jede 30 kleinere Größen von 12 Einheiten enthält, lassen sich auf zwei Arten in Einheiten verwandeln (z. B. 3 Thlr. in Pf.).

a) Von diesen 3 Größen enthält jede 12×30=360 Einheiten; alle 3 enthalten 3 mal so viel oder 360×3 Einheiten. Ohne das Product von 12×30 auszurechnen hätte man dies auch auf folgende Art ausdrücken können: 12×30×3, wobei zu bemerken, daß das erste × sich auf das Product von 12 und 30 (nicht von 12 und 30×3); das zweite sich auf dasjenige von 12×30 und 3 bezieht.

b) 3 Größen enthalten jede 30 kleinere Größen, im Ganzen also 30×3=90 kleinere Größen; von diesen kleinern Größen enthält jede 12 Einheiten; alle 90 enthalten also 12×90 Einheiten. Da diese beiden Resultate sich einander gleich sein müssen, so ist 12×30×3 oder 360×3 =12×90. Statt also in dem Producte 12×30×3, zuerst 12 durch 30 und dieses Product durch 3 zu multipliziren, kann man eben so gut 12 durch das Product 30×3 multipliziren. In einem **Producte von drei Zahlen** kann also das erste Multiplicationszeichen, welches sich eigentlich nur auf die nächstfolgende Zahl (30) bezieht, eben so gut auf das Product der beiden folgenden Factoren (30×3) bezogen werden. Man pflegt dies auf folgende Weise auszudrücken 12×30×3= 12×(30×3)[1].

52. 5×7×3×10×2×4×9 bezeichnet eine Zahl, welche man findet, indem man zuerst 5 durch 7, dann dieses Product durch 3, dieses neue Resultat durch 10, u. s. w. multiplizirt, d. h. jedes × bezieht sich auf das ganze vorhergehende Product und den folgenden Factor. Statt die Zahl 5×7

[1]) Eine Parenthese faßt die darin angezeigten Rechnungen zu einer Zahl zusammen, so daß ein davor oder dahinter stehendes Zeichen sich nicht auf die zunächststehende Zahl, sondern auf die ganze Parenthese bezieht. Beispiel. 12—8—2=2; 12—(8—2)=6.

=35 durch 3 und dieses Product durch 10 zu multipliziren, kann man nach obigem Grundsatze 5×7 multipliziren durch 3×10=30. Oder 5×7×3×10×2×4×9=5×7×(3×10) ×2×4×9. Statt 5×7 durch 30 und dieses Product durch 2 zu multipliziren, kann man auch 5×7 durch 30×2 oder 3×10×2=60 multipliziren. Oder 5×7× (3×10) ×2×4×9=5×7×(3×10×2) ×4×9. Statt 5×7 durch 60 und dieses Product durch 4 zu multipliziren, kann man auch 5×7 multipliziren durch 60×4 oder 3×10×2×4=240. Oder 5×7× (3×10×2) ×4×9=5×7×(3×10×2×4)×9. In einem **Producte von mehreren Factoren** kann also jedes Multiplicationszeichen, z. B. das zweite, das sich eigentlich nur auf die nächstfolgende Zahl bezieht, auf das Product von so vielen der folgenden Factoren ausgedehnt werden, als man will.

Diese Regel kann auch auf mehrere Multiplicationszeichen angewendet werden; so ist obiges Product = 5×7×(3×10×2) × (4×9). Denn 5×7×3×10×2×4×9=5×7×3×10×2× (4×9) nach obigem Grundsatze; und da ebenfalls 5×7×3×10×2=5×7×(3×10×2), so ist 5×7×3×10×2× (4×9)=5×7× (3×10×2) × (4×9). Ebenso ist obiges Product = 5×7× (3×10×2×4) × 9=5×7×3× (10×2) × (4×9) = 5×7×3× (10×2×4×9), u. s. w.[1])

53. Hat man eine Zahl, z. B. 5×7×3, durch ein angezeigtes Product, z. B. 10×2×4×9, zu **multipliziren**, so müßte man dies eigentlich auf folgende

[1]) Rechnet man die verschiedene Weisen mit, wie man die einzelnen Producte (z. B. 3×10×2) finden kann, so läßt sich obiges Product auf 132 verschiedene Arten ausrechnen.

Weise bezeichnen 5×7×3× (10×2×4×9). Da aber nach obiger Nummer 5×7×3×10×2×4×9 = 5×7×3× (10×2×4×9), so braucht man also nur die Factoren dieses angezeigten Productes denen der ersten Zahl anzureihen.

54. Nach Nr. 51 ist 5×7×3×10×2×4×9=5×7×3× (10×2×4×9), d. i. 105×720; nach Nr. 26 ist dies = 720×105 oder 10×2×4×9× (5×7×3), und nach Nr. 52 ist dieses = 10×2×4×9×5×7×3. Auf diese Weise nimmt in jenem Producte, ohne daß dessen Werth eine Veränderung erlitt, 10 die erste Stelle ein; eben so kann jeder andere Factor die erste Stelle einnehmen. Wollte man dies z. B. für 4 beweisen, so hätte man gesetzt: Obiges Product = 5×7×3×10× (4×9), u. s. w.

Obiges Product ist aber wiederum = 10× (2×4×9 ×5×7×3), und in dem Producte, mit welchem hier 10 multiplizirt werden soll, kann wiederum jeder Factor, z. B. 9, die erste Stelle einnehmen, so daß jene Zahl gleich ist 10×9×5×7×3×2×4.

Dieses ist abermals = 10×9× (5×7×3×4), und in dem Producte, mit welchem 10×9 multiplizirt ist, kann wieder jeder Factor die erste Stelle einnehmen. Jeder beliebige Factor kann also in jenem Producte die erste, jeder von den sechs andern kann die zweite, jeder der fünf übrigen die dritte Stelle einnehmen. Für die vierte, fünfte Stelle, u. s. w., beweist man dasselbe, indem man die Parenthese mit der vierten, fünften Stelle, u. s. w., beginnt. Hieraus folgt, daß man in einem Producte mehrerer Factoren, **die Ordnung der Factoren** in beliebiger Weise verändern kann.

55. Um ein angezeigtes Product durch einen

seiner Factoren zu **dividiren**, brauche ich nur diesen Factor in demselben auszulassen. Z. B. $3\times5\times2 : 5 = 3\times2\times5 : 5$. Also ist 3×2 diejenige Zahl, die man durch 5 multipliziren muß, um den Dividend $3\times2\times5$ zu erhalten.

Um ein angezeigtes Product durch das Product mehrerer seiner Factoren **zu dividiren**, braucht man in demselben nur diese Factoren auszulassen. Z. B. $3\times5\times2\times7 : (5\times7) = 3\times2\times(5\times7) : (5\times7)$, woraus man wiederum sieht, daß 3×2 diejenige Zahl ist, welche durch die Multiplication mit 5×7 den Dividend hervorbringt.

Die Dezimalen.

Numeration der Dezimalen.

56. Alle Grundsätze und Regeln, welche in der Lehre von den ganzen Zahlen vorkommen, lassen sich ausdehnen auf die Größen, welche kleiner sind als die Einheit oder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einheiten (z. B. 6 und 7) enthalten sind. Nach dem Numerationsgesetze der ganzen Zahlen wird eine Größe gemessen oder gezählt, indem man sie vergleicht mit verschiedenen Vergleichsgrößen, von denen jede höhere immer ein Zehner der unmittelbar niedrigern ist. Hat man auf diese Weise die in einer Größe enthaltenen Millionen, Hunderttausende.......... Tausende, Hunderte, Zehner und Einer gezählt, und bleibt noch etwas übrig, so vergleicht man diesen Rest mit einer neuen kleinern Vergleichsgröße. Nach dem allgemeinen Numerationsgesetze muß die Einheit einen Zehner dieser Vergleichs-

größe der ersten Ordnung unter den Einern bilden, und man findet also diese, indem man die Einheit in zehn gleiche Theile theilt.

Hat man die in jenem Reste enthaltenen Vergleichsgrößen der ersten Ordnung unter den Einern gezählt [1]) und bleibt ein neuer Rest, so wird derselbe mit einer neuen kleinern Vergleichsgröße verglichen. Nach dem allgemeinen Numerationsgesetze muß die Vergleichsgröße der ersten Ordnung unter den Einern einen Zehner dieser Vergleichsgröße der zweiten Ordnung unter den Einern enthalten, und man findet also diese, indem man die Vergleichsgröße der ersten Ordnung in zehn gleiche Theile theilt.

Hat man die im zweiten Reste enthaltenen Vergleichsgrößen der zweiten Ordnung gezählt, und bleibt ein dritter Rest, so wird derselbe mit einer neuen kleinern Vergleichsgröße verglichen. Nach dem allgemeinen Numerationsgesetze muß die Vergleichsgröße der zweiten Ordnung unter den Einern einen Zehner der Vergleichsgröße der dritten Ordnung unter den Einern enthalten, und man findet also diese, indem man die Vergleichsgröße der zweiten Ordnung in zehn gleiche Theile theilt.

Und so fährt man fort neue Vergleichsgrößen zu bilden und mit denselben jeden Rest zu vergleichen, bis entweder kein Rest mehr bleibt, oder derselbe so klein wird, daß man ihn nicht mehr braucht in Betracht zu ziehen. (Vergl. 9.) Die Vergleichsgrößen der Ordnungen unter

[1]) Es sind deren weniger als 10, warum? Ihre Zahl kann auch 0 sein.

der Einheit heißen **Dezimalen** [1]). Eine Zahl, durch welche auf diese Weise vermittelst der Vergleichsgrößen unter der Einheit eine Größe bezeichnet wird, heißt **Dezimalzahl.**

57. Die Dezimalzahlen werden in ähnlicher Weise **angeschrieben** wie die ganzen Zahlen, indem man

1° die Stelle der Einer durch einen Strich (Komma), den man rechts neben die Einer setzt, bezeichnet, und 2° die Vergleichsgrößen der verschiedenen Ordnungen unter der Einheit in ihrer natürlichen Ordnung aufeinanderfolgen läßt.

1 Zehner, 8 Einer, 6 Vergleichsgrößen der ersten Ordnung unter den Einern, 4 Vergleichsgrößen der zweiten Ordnung unter den Einern, wird demnach angeschrieben 18, 64 Einheiten.

Die Stellen der fehlenden Vergleichsgrößen werden wie bei den ganzen Zahlen durch Nullen besetzt. Also 7 Einer, 4 Vergleichsgrößen der zweiten Ordnung unter den Einern, 8 Vergleichsgrößen der dritten Ordnung unter den Einern wird angeschrieben 7,048 Einheiten; und 7 Einer, 8 Vergleichsgrößen der dritten Ordnung unter den Einern wird angeschrieben 7,008 [2]).

Der Strich, welcher die Ganzen von den Dezimalen trennt, heißt D e z i m a l s t r i c h. Da die Stellen hier nicht von der letzten Ziffer, sondern von dem Dezimalstrich an gezählt werden, so wird der Werth einer Dezimalzahl eben so wenig durch Nullen, die man anhängt, als durch Nullen, die man davor setzt, verändert. Beispiel. 3,45=003,4500

[1]) Von dem lateinischen Worte decem = zehn, nach welchem auch das Nummerationssystem der ganzen Zahlen und Dezimalzahlen D e z i m a l s y s t e m heißt.

[2]) Was würde 7, 48 und 7, 8 bezeichnen?

d. h. kein Hundert, kein Zehner, 3 Einheiten, 4 Vergleichsgrößen der ersten Ordnung nach den Einern, 5 Vergleichsgrößen der zweiten Ordnung, keine der dritten, keine der vierten = 3 Einer, 4 Vergleichsgrößen der ersten Ordnung, 5 Vergleichsgrößen der zweiten Ordnung unter den Einern. (Vergl. 10.)

Anmerkung. Hat die Dezimalzahl keine Ganzen, so bezeichnet man gewöhnlich die Stelle derselben durch eine Null. 5 Vergleichsgrößen der ersten Ordnung unter den Einern schreibt man gewöhnlich 0, 5 und nicht , 5.

58. Das Verfahren, durch welches man den **Lehrsatz** von Nr. 11 gefunden hat, dieser Lehrsatz selbst und dessen Beweis läßt sich ohne Weiteres auf die Dezimalzahlen anwenden. Beispiel. In der Zahl 325,745 kann der unterstrichene Theil auf folgende Weise ausgesprochen werden 2574 Vergleichsgrößen der zweiten Ordnung unter den Einern. Denn der letzten Ziffer — 4 — legt man auf diese Weise ihren rechten Werth bei und mithin auch den vorhergehenden, da jede ausgesprochen wird wie ein Zehner der folgenden.

Obige Zahl ist nach demselben Grundsatze = 325745 Vergleichsgrößen der dritten Ordnung unter den Einern.

59. Aus diesem Grundsatze ergeben sich die **Namen** der verschiedenen Vergleichsgrößen unter den Einern.

a) Da 1=1,0=10 Vergleichsgrößen der ersten Ordnung unter den Einern, so heißen diese Vergleichsgrößen Zehntel der Einheit, oder einfach Zehntel (34).

Da 1=1,00=100 Vergleichsgrößen der zweiten Ordnung unter der Einheit, so heißen diese Vergleichsgrößen Hundertel der Einheit oder Hundertel.

Da 1=1,000=1000 Vergleichsgrößen der dritten Ord-

nung unter der Einheit, so heißen diese Tausendtel der Einheit.

Da 1=1,0000=10000 Vergleichsgrößen der vierten Ordnung unter der Einheit, so heißen diese Zehntausendtel der Einheit, u. s. w.

60. Die Zahl 21506,734 kann Franken, Thaler, Goldstücke von 10 Franken, Summen von 100 Thalern, Münzen von 10 Centimen und von 1 Centime, und überhaupt Größen von jeder Art, also Zehner, Hunderte, Tausende oder Zehntel, Hundertel, u. s. w., von jeder Größe bezeichnen. Hält man dieses fest, so läßt sich der Grundsatz von Nr. 58 und Nr. 11 verallgemeinern. Will man z. B. wissen, wieviel Hunderte in obiger Zahl enthalten sind (z. B. wieviel Hundertfrankenstücke in 21506,734 Franken enthalten sind), so verfährt man wie in Nr. 11 und findet zuerst, daß die drei ersten Ziffern 215 Hunderte enthalten (215 Hundertfrankenstücke).

0 bezeichnet Vergleichsgrößen, die auf die Hunderte folgen, also, Zehntel von Hunderten (Zehntel von Hundertfrankenstücken).

6 bezeichnet Vergleichsgrößen, die auf diese Zehntel von Hunderten folgen, also Hundertel von Hunderten.

7 bezeichnet Vergleichsgrößen, die auf diese Hundertel von Hunderten folgen, also Tausendtel von Hunderten.

3 bezeichnet Vergleichsgrößen, die auf diese Tausendtel von Hunderten folgen, oder Zehntausendtel von Hunderten.

4 bezeichnet Vergleichsgrößen, die auf diese Zehntausendtel von Hunderten folgen, oder Hunderttausendtel von Hunderten.

Also macht obige Zahl 215 Hunderte, 0 Zehntel von Hunderten, 6 Hundertel von Hunderten, 7 Tausendtel von

Hunderten, 3 Zehntausendtel von Hunderten, 4 Hunderttausendtel von Hunderten, oder 215,06734 Hunderte. (215,06734 Hundertfrankenstücke.)

Ebenso hätte man gefunden, daß obige Zahl = 215067,34 Zehntel (Zehntel von Franken oder Stücke von 10 Centimes) oder 2150673,4 Hundertel (Hundertel von Franken oder Centimes) macht.

Um also Einheiten in Vergleichsgrößen einer gewissen Ordnung zu verwandeln, braucht man nur den Dezimalstrich rechts neben die Ziffer zu rücken, welche die fraglichen Vergleichsgrößen bezeichnet. Denn so läßt man dieser Stelle ihren richtigen Werth und folglich auch allen andern, da jede vorhergehende einen Zehner der folgenden und jede folgende ein Zehntel der vorhergehenden bezeichnet.

Anmerkung. Der Grundsatz gilt auch für ganze Zahlen. So ist 21506 = 215,06 Hunderte = 21,506 Tausende.

61. Nach diesen Grundsätzen läßt sich eine Dezimalzahl auf sehr verschiedene Weisen richtig **aussprechen.** Von diesen vielen richtigen Weisen ist folgende die übliche.

Bei größern Zahlen bildet man, wie bei den ganzen Zahlen, zu beiden Seiten des Dezimalstriches Gruppen von drei Ziffern. 25321,124575 = 25 Tausende; 321; 124 Tausendtel; 575 Millionstel.

Bei kleinern bildet man eine Gruppe aus dem Ganzen und eine aus den Dezimalen. Also 27, 35 = 27 Einheiten, 35 Hundertel.

Oder man bildet nur eine Gruppe 3,75 = 375 Hundertel.

62. Aus dem Gesagten geht zur Genüge hervor, wie eine ausgesprochene Dezimalzahl **anzuschreiben** sei. Hat

man eine nach der üblichen Weise oder überhaupt nach Regel 48 ausgesprochene Anzahl von Vergleichsgrößen anzuschreiben, so schreibt man dieselbe wie eine selbstständige Zahl und sorgt nur dafür, nöthigenfalls durch Ergänzung von Nullen oder Rücken des Dezimalstriches, daß die Ziffer der Einheiten jener Vergleichsgrößen die Stelle der durch die Zahl bezeichneten Vergleichsgrößen einnehme. Vergl. die Beispiele der beiden letzten Nummern.

Aufgaben.

1. (56 und 57) Wieviel Stunden macht 6 Minuten?
2. Wieviel Thaler macht 3 Silbergroschen?
3. Wieviel Jahrzehnte macht 1 Jahr?
4. Wieviel Franken macht 1 Centime? (100 Cent. = 1 Franken.)
5. Wieviel Stunden machen 36 Secunden?
6. Wieviel Jahrhunderte macht 1 Jahr?
7. Wieviel Stunden machen 30 Minuten?
8. Wieviel Thaler machen 18 Silbergroschen?
9. Wieviel Jahrzehnte machen 7 Jahre?
10. Wieviel Franken machen 3 Centimes, 27 Centimes, 375 Centimes?
11. Wieviel Thaler machen 927 Silbergroschen?
12. Wieviel Stunden machen 4560 Secunden?
13. Wieviel Minuten sind in 0,3 Stunden?
14. Wieviel Silbergroschen sind in 0,6 Thaler?
15. Wieviel Jahre sind in 0,7 Jahrzehnt?
16. Wieviel Centimes sind in 0,03 Franken, in 0,27 Franken, in 3,75 Franken?
17. Ein Kilometer = 1000 Meter. Wieviel Kilometer sind 100 Meter? 10 Meter? 1 Meter? 200 Meter? 30 Meter? 5 Meter? 69235 Meter?
18. (58, 59) Folgende Zahlen richtig auszusprechen, indem man die Ziffern in Gruppen von zwei und zwei Ziffern zusammenfaßt: 23455,65; 345,645; 51000,5; 3,21455; 71,6004; 0,123125.
19. Man spreche sie auf eine andere Weise richtig aus, indem man die Ziffern in Gruppen von drei Ziffern zusammenfaßt.

20. Diese Zahlen auszusprechen, indem man die Ziffern a) in Gruppen von 1 und 5 Ziffern, b) in Gruppen von 2 und 4, c) in Gruppen von 4 und 2, d) von 5 und 1, und e) in eine Gruppe von 6 Ziffern zusammenfaßt.

21. Folgende Zahlen auszusprechen, indem man die beiden ersten Ziffern, dann die drei folgenden, dann die zwei letzten in Gruppen zusammenfaßt: 21345,67; 500,5050; 2,142142; 333333,3; 3553,535; 67,50576; 0,155115; 500,0005.

22. (60) 1 Hektare = 100 Ares. Wieviel Hektares sind demnach 315 Ares; 214,5 Ares; 21,45 Ares; 15 Ares?

23. Wieviel Ares sind 21,45 Hektares; 2,235 Hektares; 27,5 Hektares; 40 Hektares?

24. Wiederholung der Aufgaben 3, 4, 6, 9, 10, 15, 16, 17 mit Anwendung der Regel von Nr. 60.

25. Manchmal nimmt man bei Bestimmung von großen Zahlen die Million als Einheit an. Wieviel Millionen beträgt die Bevölkerung der verschiedenen Königreiche Deutschland's? (Siehe Aufgabe 1. Seite 46.)

26. Die Zahlen der Aufgaben 18 und 21 nach der üblichen Weise auszusprechen.

27. Anzuschreiben: 2 Ganze 325 Tausendtel; 15 Ganze 25 Tausendtel; 27 Ganze 5 Tausendtel; 30 Ganze 1235 Zehntausendtel; 8 Ganze 235 Zehntausendtel; 10 Ganze 15 Zehntausendtel; 136 Ganze 136 Zehntausendtel; 2 Ganze 2 Zehntausendtel; 2345 Ganze 2345 Millionstel.

28. Anzuschreiben: 1235675 Hundertel; 1235675 Zehntausendtel; 1235675 Millionstel; 10 Millionstel; 35 Tausendtel; 35 Hundertel; 35 Zehntel.

29. Anzuschreiben und dann nach einer der üblichen Weisen auszusprechen: 3 Zehner 15 Zehntel 75 Tausendtel; 3 Hunderte 15 Hundertel 75 Hunderttausendtel 3 Zehnmillionstel; 125 Tausende 125 Einer 125 Tausendtel 125 Millionstel; 125 Zehntausende 125 Zehntausendtel 125 Hundertmillionstel; 50 Tausende 50 Einer 50 Hundertel 50 Millionstel.

Addition der Dezimalen.

63. Bei der **Addition** der Dezimalzahlen stellt man, wie bei der Addition der ganzen Zahlen, die Ziffern derselben Stellen untereinander, oder, was dasselbe ist, man schreibt die Summanden so an, daß die Dezimalstriche genau untereinander stehen, und addirt dann wie bei den ganzen Zahlen die gleichartigen Vergleichsgrößen, indem man bei der kleinsten anfängt, und behält die Zehner jeder Stelle um sie als Vergleichsgröße zu der folgenden Stelle hinzuzufügen. In der Summe setzt man den Dezimalstrich unter die Dezimalstriche der Summanden. Beispiel. 2314,75 +124,105 +16+18,5.

```
2314,78
 124,135
  16
  18,5
2473,415
```

Beweis und **Probe,** wie bei den ganzen Zahlen. Vergl. 17 und 18.

Subtraction der Dezimalen.

64. Bei der **Subtraction** der Dezimalen schreibt man wie bei den ganzen Zahlen, die Ziffern des Subtrahends unter die derselben Stelle des Minuends, oder was dasselbe ist, man schreibt den Subtrahend so unter den Minuend, daß die Dezimalstriche genau untereinander stehen und subtrahirt alsdann die verschiedenen Vergleichsgrößen des Subtrahends von den gleichartigen des Minuends, indem man bei der kleinsten anfängt. Sind an einer Stelle des Minuends keine oder nicht genug Vergleichsgrößen, so fügt man in Gedanken zehn dieser Vergleichsgrößen zum

Minuend, und behält diesen Zehner um ihn als Vergleichsgröße der folgenden Stelle mit den andern der folgenden Stelle vom Minuend abzuziehen. Beispiel. 2000,3086 — 675,2393, und 125,435—114,955.

2000,3086	125,435
675,2393	114,955
1325,0693	10,48 [1]

Anmerkung. Wenn Minuend und Subtrahend nicht gleichviele Dezimalstellen haben, so kann man die fehlenden Stellen durch Nullen besetzen (57). Beispiel. 25,5—15,25; 100—95,955; 25,455—23,54.

25,50	100,000	25,455
15,25	95,955	23,540
10,25	4,045	1,915

Man sieht aber, wenn diese Stellen leer bleiben, eben so gut, daß von den betreffenden Vergleichsgrößen keine im Minuend oder Subtrahend vorhanden ist und kann daher auch diese Mühe sparen.

25,5	100,	24,455
15,25	95,955	23,54
10,25	4,045	1,915

Beweis und **Probe** wie bei den ganzen Zahlen. (Vergl. 21, 22, 23, 24.

Aufgaben.

1. Wieviel macht 1,5+2,2+0,7+3,4+5,2+12,3?
2. Wieviel macht 23,5+3,75+15,235+0,4245+1,234+77,0065?
3. Wieviel macht 23,705—12,554?
4. Wieviel macht 33,795—13,895?
5. Wieviel macht 100—22,6935?
6. Wieviel macht 357,155—100,5?

[1] Die Null am Ende braucht man eben so wenig, als die Null am Anfang zu schreiben. (Warum?)

7. Wieviel macht 357,155—100,5+100—22,6935?
8. Wieviel macht 357,155—100,5—100+22,6935?
9. Wieviel macht 0,00001—0,000009?
10. 1 Thaler = 3,75 Franken. Wieviel Franken machen 4 Thlr. =3,75+3,75+3,75+3,75?
11. Wieviel Franken machen 10 Thaler?
12. Wieviel Franken machen 10 Summen von 3×50 Franken?
13. Wieviel Franken machen 12 Summen von 0,013 Franken?
14. Wieviel mal kann man 0,12 abziehen von 1,08156?
15. Wieviel mal kann man 2,35 abziehen von 23,5?
16. Wieviel □ Meilen beträgt der Flächeninhalt a) der deutschen Länder des österreichischen Staates, b) der außerdeutschen Länder desselben, c) des ganzen österreichischen Staates, d) der deutschen Länder des preußischen Staates, e) der außerdeutschen Länder desselben, f) der ganzen preußischen Monarchie? (S. Aufg. 1, S. 46.)
17. Wieviel □ Meilen sind a) die deutschen Länder des österreichischen Staates größer, als die des preußischen Staates, b) die außerdeutschen Länder desselben größer als die des preußischen, c) der österreichische Staat größer als der preußische?
18. Um wieviele Quadratmeilen ist der deutsche Theil a) des österreichischen Staates b) des preußischen Staates kleiner als der andere?
19. Die letzte senkrechte und horizontale Colonne folgender Tabelle auszufüllen.

Einnahmen und Ausgaben im Jahre 1864.

Monate.	Einnahme.	Ausgaben für Nahrung.	Ausgaben für Kleidung.	Andere Ausgaben.	Ueberschuß der Einnahme.	Ueberschuß der Ausgaben.
Januar	400,00	100,50	75,25	134,75		
Februar	200,50	95,25	25,00	17,10		
März	150,25	105,75	5,35	115,45		
April	250,75	125,30	125,85	20,45		
Mai	160,75	103,45	15,15	31,25		
Juni	150,75	116,15	8,00	17,70		
Juli	100,00	105,05	1,25	11,15		
August	150,65	123,25	2,35	65,00		
September	590,35	99,85	70,00	95,35		
October	300,75	107,45	215,50	12,25		
November	175,40	115,65	0,00	18,45		
Dezember	680,25	120,25	10,25	25,35		
Total. . .						

Multiplication der Dezimalen.

65. Multiplication einer Dezimalzahl durch eine ganze Zahl. Beispiel. 0,013×12.

12 Größen von 0,013 Einheiten . . . =
Die Summe dieser Addition findet man, indem man 12 Summanden von 13 Einheiten addirt, oder 13 mit 12 multiplizirt, und dann den Dezimalstrich an dieselbe Stelle setzt, wie in jedem Summanden, d. h. drei Stellen abschneidet. Um eine Dezimalzahl durch eine ganze Zahl zu multipliziren, multiplizirt man also ohne Rücksicht auf den Dezimalstrich, und schneidet dann am Producte so viele Stellen ab, als der Multiplicand hat. (Vgl. 29.)

0,013+
0,013+
0,013+
0,013+
0,013+
0,013+
0,013+
0,013+
0,013+
0,013+
0,013+
0,013=
0,156

Anmerkung. Hat das Product nicht Ziffern genug, um die nöthige Anzahl von Stellen abzuschneiden, so muß man Nullen links hinzufügen. Beispiel. 0,003×12=0,036.

66. Multiplication einer ganzen Zahl durch eine Dezimalzahl. Beispiel. 12×0,013.

Wir haben hier nach der Definition der Multiplication (25) folgende Aufgabe zu lösen: Eine Größe macht 12 Einheiten; wieviel machen 0,013 solcher Größe.

1 Größe macht 12 Einheiten; oder 1,000 Größe macht 12,000 Einheiten (45); oder 1000 Tausendtel der Größe macht 12000 Tausendtel der Einheit (46).

Also macht 1 Tausendtel der Größe 12 Tausendtel der Einheit oder 0,012 Einheiten, und 13 Tausendtel der Größe oder 0,013 Größe macht 0,012×13=0,156 Einheiten (32).

Um eine ganze Zahl durch eine Dezimalzahl zu multiplizieren, multiplizirt man also ohne Rücksicht auf den Dezimalstrich, und schneidet dann am Producte so viele Stellen ab, als der Multiplicator hat. (Vergl. 30.)

Anmerkung. Wie bei voriger Nummer. Also 3×0,012 =0,036.

67. Multiplication einer Dezimalzahl durch eine Dezimalzahl. Beispiel. 9,013×0,12.

Wir haben hier folgende Aufgabe zu lösen: Eine Größe macht 9,013 Einheiten; wieviel machen 0,12 solcher Größe?

1 Größe macht 9,013 Einheiten; oder 1,00 [1]) Größe macht 9,01300 [2]) Einheiten (45); oder 100 Hunderttel der Größe macht 901300 Vergleichsgrößen der fünften Stelle unter der Einheit (46).

1 Hundertel der Größe macht 9013 Vergleichsgrößen der fünften Stelle unter der Einheit, oder 0,09013 und

12 Hundertel der Größe macht 0,09013×12=1,08156 (55).

Um also zwei Dezimalzahlen miteinander zu multiplizieren, multiplizirt man ohne Rücksicht auf den Dezimalstrich, und schneidet am Producte so viele Dezimalstellen ab, als beide Factoren zusammen haben. (Vergl. 31.)

Anmerkung. Wie bei den obigen Nummern. Beispiel. 0,013×0,12=0,00156.

[1]) Hier fügt man so viele Nullen hinzu, als der Multiplicator Dezimalstellen hat.

[2]) Hier fügt man ebenfalls so viele Nullen hinzu, als der Multiplicator Dezimalstellen hat, und man hat demnach so viele Dezimalstellen, als beide Factoren zusammen Dezimalstellen haben.

Anmerkung 2. Unmittelbarer, aber vielleicht weniger klar wäre folgender Beweis, der sich auch auf die vorige Nummer anwenden läßt.

Enthielte jede Größe 1 Tausendtel, so würden 0,12 Größen 0,12 Tausendtel oder (48) 0,00012 enthalten; jede enthält aber 9013 Tausendtel; alle zusammen also 0,00012×9013=1,08,58.

68. Der Lehrsatz von Nr. 67 enthält die beiden Lehrsätze von Nr. 65 und 66, so wie auch derjenige von Nr. 31, die beiden von Nr. 29 und 30 enthält. Zieht man in Erwägung, daß 2, 3, 4 Nullen zu einer ganzen Zahl hinzufügen, im Grunde genommen, nichts anders heißt, als den Dezimalstrich 2, 3, 4 Stellen weiter rechts rücken, so sieht man, daß die Regeln der Multiplication der Dezimalen, so wie die der Addition und Subtraction, nur eine Verallgemeinerung der entsprechenden Regeln der ganzen Zahlen sind, und daß eine allgemeine Regel die der Nr. 29, 30, 31, 65, 66 und 67, in sich begreift. Dieselbe lautet: Hat man Zahlen mit Nullen am Ende oder mit Dezimalstrichen mit einander zu multipliziren, so multiplizirt man ohne Rücksicht auf die Nullen und die Dezimalstriche; so viele Nullen oder Dezimalstellen man am Multiplicand hat, so viele Stellen rückt man den Dezimalstrich rechts (durch Hinzufügung von Nullen) oder links und thut dann dasselbe für den Multiplicator.

69. 9,013×0,12 gibt, wenn man ohne Rücksicht auf den Dezimalstrich multiplizirt, dasselbe Resultat, wie 0,12×9,013 (26). Berücksichtigt man aber den Dezimalstrich, so hat man an jedem der gleichen Resultate 5 Ziffern abzuschneiden, und man erhält in beiden Fällen dasselbe Product. Also ist 9,013×0,12=0,12×9,013 und eben so ist 13×0,012=0,012×13. Man kann also bei Dezimalzahlen, wie bei ganzen Zahlen, Multiplicand und Multiplicator mit einander verwechseln.

70. **Probe** wie bei den ganzen Zahlen. Vergl. 33.

Aufgaben.

1. (65) Wieviel macht 5 Größen von 1,25 Einheiten; 7 Größen von 1,25 Einh.; 12 Größen von 1,25 Einh.; 2 Größen von 1,25 Einheiten?

2. Wieviel macht 3,75×6; 22,50×2; 3,75×12?

3. Wieviel macht 12,345×15; 13,567×125; 345,216×3257; 2,5×10; 0,07×100; 1,238×1000; 67,358×10000; 3,95×100000; 36,545457×160000; 0,0005×32; 0,333333×243.

4. (66) Wieviel macht 1,25 Größe von 5 Einheiten; 3,75 Größe von 25 Einh.; 11,345 Größe von 83 Einh.; 0,005 Größe von 352 Einh.; 0,0003 Größe von 75 Einh.?

5. Wieviel macht 1,25 Größe von 7 Einheiten + 0,75 Größe von 7 Einh.?

6. Wieviel macht 13×3,55+13×5,76—13×1,31?

7. Wieviel macht 18×2,235+14×2,235+35×2,235+35×2,235—2×2,235?

8. Wieviel macht 0,1 Größe von 26 Einheiten; 0,01 Größe von 250 Einh.; 0,001 Größe von 1000 Einh.; 0,0001 Größe von 2500 Einh.?

9. Wieviel macht 1 Zehntel von 75 Einheiten; 1 Hunderttel von 2565 Einh.; 1 Tausendtel von 32 Einh.: 1 Millionstel von 25 Einheiten?

10. Ein Thaler = 3,75 Franken. Wieviel Franken machen 12 Thaler; 18 Thaler; 30 Thaler; 60 Thaler?

11. Ein Franken = 8 Silbergroschen = 20 Sous. Wieviel Silbergroschen und wieviel Sous machen 3,75 Franken; 5,25 Fr.; 10,50 Fr.; 19,50 Fr.?

12. (67) Wieviel machen 4,5 Größen von 6,2 Einheiten; 3,25 Größen von 1,05 Einh.; 1,5 Größen von 3,124 Einh.; 0,5 Größen von 1,4 Einh.; 0,5 Größen von 0,1 Einh.; 0,003 Größen von 0,012 Einh.?

13. Wieviel macht 31,245×156,15; 30,005×150,02; 0,0008×0,0015; 4356,15×0,0001?

14. Wieviel macht 57,235×1,005+57,235×0,955—7,235×2?

15. Wenn das Rieß Papier (= 20 Buch) 9,50 Franken, das

einzelne Buch aber 0,55 kostet, wieviel gewinnt man, wenn man ein Rieß beisammen kauft?

16. Was kosten 7,75 Meter Tuch, wovon der Meter 6,25 Franken kostet?

17. Ein holländischer Florin = 2,1164 Franken. Wieviel machen 3725,25 holländische Florin?

18. Ein Berliner Fuß = 0,3183 Meter. Wieviel Meter macht 15 Berliner Fuß?

19. Eine Berliner Elle = 0,6669 Meter. Wieviel Meter macht 54 Berliner Ellen?

20. Die Pariser Elle (Stab) = 2 Luxemburger Ellen. 1 Luxemburger Elle = 0,60 Meter. Wieviel Meter macht 12 Stab?

21. Was kosten 5 Stab wenn der Meter 12,25 Franken kostet?

Division der Dezimalen.

71. Wegen des Grundsatzes von Nr. 56 ist es bei der Division der Dezimalen, wie bei den ganzen Zahlen, einerlei, ob der bekannte Factor (Divisor) der Multiplicand oder Multiplicator des Productes (Dividendes) ist, d. h. der Quotient zweier Zahlen (z. B. 1,08156 : 0,12) ist derselbe, mag er das Resultat einer Division der ersten oder der zweiten Art sein. (Man wende auf den angegebenen Fall die Beweisführung von Nr. 36 an.)

Läßt die Division einen Rest, so bezeichnet hier, wie bei den ganzen Zahlen, der Quotient nicht genau die Zahl, deren Product mit dem Divisor den Dividend gibt, sondern der Dividend enthält alsdann dieses Product und außerdem den Rest.

72. a) Für den Fall, wo der Dividend wenigstens so viele Dezimalen hat, als der Divisor und die Division keinen Rest läßt, gibt die Regel von Nr. 67 unmittelbar folgenden vorläufigen Grundsatz: Man dividirt den Dividend durch den Divisor ohne Rücksicht auf den Dezimalstrich und zieht

dann den Dezimalstrich am Quotienten so, daß der Quotient und Divisor (die beiden Factoren) zusammen so viele Dezimalstellen haben, als der Dividend (das Product). Beispiel. 1,08156 : 0,12 = 9,013. b) Dieser Grundsatz ist auch richtig im Falle, wo die Division einen Rest läßt, welcher Vergleichsgrößen von derselben Ordnung, wie die letzte Ziffer des Dividendes, bezeichnet.

Beispiel. 1,08165 : 0,12.

108160 : 12 gibt zum Quotienten 9013 und läßt 4 zum Rest; d. h. 108160 = 108156 + 4 und 108156 = 12 × 9013.

Folglich ist auch 1,08160 = 1,08156 + 0,00004 und 1,08156 = 0,12 × 9,013, oder 1,08160 = 0,12 × 9,013 + 0,00004; also 1,08160 : 0,12 gibt zum Quotienten 9,013 und läßt 4 Dezimalen der fünften Stelle übrig. c) Aus obigem Grundsatze folgt, daß man den Dezimalstrich am Quotienten zieht, sobald man vom Dividende soviele Dezimalstellen herabgenommen und dividirt hat, als der Divisor Dezimalstellen hat. Beispiel. 10,81623 : 0,12.

10,81623	0,12
01	90,

Der Divisor hat zwei Dezimalstellen; nachdem ich die Ziffer der zweiten Dezimalstelle — 1 — heruntergesetzt und dividirt habe, setze ich den Dezimalstrich (nach der Null).

Durch die Vollendung der Division erhält der Quotient so viele Dezimalstellen, als deren im Dividend auf die zwei ersten folgen; mithin haben Quotient und Divisor zusammen so viele Dezimalstellen, als der Dividend, was mit dem obigen Grundsatze übereinstimmt.

10,81623	0,12
016	90,135
42	
63	
3	

d) Obige Division gibt also zum Quotienten 90,135 und läßt 3 Hunderttausendtel übrig. Dieses Resultat ist richtig, aber es ist insofern kein vollständiges Resultat, als sich die 3 Hunderttausendtel eben so gut, wie die 2 Zehntausendtel und die 8 Tausendtel dividiren lassen. Fügt man nämlich zum Dividend nach eine Null (57), so erhält man den Quotienten 90,1352, welcher genauer ist, da jetzt nur mehr 6 Millionstel übrig bleiben. Hätte man noch eine Null hinzugefügt, so wäre der Quotient 90,13525 herausgekommen, welcher ganz genau ist, da jetzt nichts mehr übrig bleibt.

```
10,816230 | 0,12
  016     | 90,1352
    42
     63
      20
       6
```

Anmerkung. Es war übrigens nicht nöthig die Nullen zum Dividende hinzuzufügen; es genügte, dieses in Gedanken zu thun, und man konnte dann die Nullen heruntersetzen, als ob sie angeschrieben wären.

e) Aus dem Gesagten ergibt sich folgende **Regel** für die Division der Dezimalen: Man dividirt ohne Rücksicht auf den Dezimalstrich; man zieht im Quotienten den Dezimalstrich, nachdem man so viele Dezimalstellen des Dividendes dividirt hat, als der Quotient deren hat; läßt die Division einen Rest, so fügt man eine Null hinzu, als ob man sie vom Dividende herntergesetzt hätte, und setzt die Division fort; bleibt auch dann noch ein Rest, so wiederholt man dasselbe bis entweder die Division aufgeht, oder der Rest so klein wird, daß er nicht braucht berücksichtigt zu werden.

Anmerkung. Hat der Dividend 1, 2, 3 u. s. w., Stellen weniger, als der Divisor, so wird im Quotienten der De

zimalstrich erst gezogen, nachdem man die erste, zweite, dritte, u. s. w., Null zu den Resten hinzugefügt und den auf diese Weise entstandenen Rest dividirt hat.

Beispiele. 1,54 : 0,0875 und 6987,5 : 0,0215.

1,54	0,0875	6987,5	0,0215
1540	17,6	537	325000
6650		1075	
5250		0000	
000			

73. Da 25=25,000, so läßt sich diese Regel auch auf ganze Zahlen anwenden und gibt ein Mittel an die Hand, die Division der ganzen Zahlen zu vollenden, d. h. auch den Rest genau zu dividiren oder doch die Division fortzusetzen, bis der Rest so klein wird, daß er nicht braucht berücksichtigt zu werden. Beispiele. 25 : 8; 16,4 : 7.

25	8	1,64	7
10	3,125	24	2,3428
20		30	
40		20	
0		60	
		4	

74. Je kleiner der Rest ist, der noch dividirt werden sollte, desto genauer ist der Quotient; bleibt kein Rest, so ist der Quotient ganz genau; in den meisten Fällen wird aber dieser genaue Quotient nicht durch die Division der Dezimalen zu finden sein. Beispiele. 2 : 1,1; 24 : 7.

20	1,1	24	7
11	0,18	30	3,428571
90		20	
88		60	
20		40	
		50	
		10	
		30	

Im ersten Beispiel gleicht der dritte theilweise Dividend dem ersten, obgleich er Vergleichsgrößen einer 100 mal kleinern Ordnung bezeichnet. Die dritte Ziffer des Quotienten wird also der ersten nach der Null, und der vierte Rest dem zweiten gleichen. Aus demselben Grunde wird die 4te Ziffer der 2ten, die 5te der 3ten, u. s. w., gleichen.

Aehnlich verhält es sich mit dem zweiten Beispiel, wo die 9te Division der 3ten, mithin die 9te Ziffer der 3ten, die 10te der 4ten, die 11te der 5ten, u. s. w., gleichen wird.

20	1,1	16,4	7
11	0,1818	24	2,34285714285714
90		30	
88		20	
20		60	
11		40	
90		50	
88		10	
20		30	
11		20	
90		60	
88		40	
20		50	
11		10	
9		30	
		20	

Derartige Quotienten nennt man **periodische Dezimalzahlen.**

75. Es ist nicht schwer eine Division zu finden, welche eine bestimmte periodische Dezimalzahl z. B. 0,181818 zum Quotienten gibt. Nach der zweiten theilweisen Division muß sich der erste Dividend als Rest wiederholen, be-

zeichnet aber 100 mal kleinere Vergleichsgrößen. Damit dies der Fall sei, ist weiter nichts erfordert, als daß der Dividend = dem Divisor $\times 0{,}18 +$ der 100ste Theil des Dividends; oder: der Dividend $\times 100 =$ dem Divisor $\times 18 +$ der Dividend; oder der Dividend $\times 99 =$ dem Divisor $\times 18$. Nimmt man nun z. B. zum Dividend 18 und zum Divisor 99, so ist diese Bedingung erfüllt; denn $18 \times 99 = 99 \times 18$. Also 18 : 99 = 0,181818 u. s. w. Hätte man eine Division finden wollen, welche zum Quotienten gäbe 2,3428571428 u. s. w., so hätte man in ähnlicher Weise verfahren. Der dritte theilweise Dividend = dem Divisor $\times 0{,}0428571 +$ dem Millionstel des dritten theilweisen Dividendes; oder der dritte theilweise Dividend $\times 1000000 =$ dem Divisor $\times 42857{,}1 +$ der dritte theilweise Dividend; oder der dritte theilweise Dividend $\times 999999 =$ dem Divisor $\times 42857{,}1$. Nimmt man nun z. B. an, der dritte theilweise Dividend sei 42857,1 und der Divisor sei 999999, so ist diese Bedingung erfüllt. Nun aber ist der erste Dividend = dem Divisor $\times 2{,}3 +$ der dritte theilweise Dividend; oder der erste Dividend $= 999999 \times 2{,}3 + 42857{,}1 = 2300000 - 2{,}3 + 42857{,}1 = 2342857{,}1 - 2{,}3 = 234284{,}8$.

Also 234284,8 : 999999 = 2,3428571428 u. s. w.

76. Probe der Division der Dezimalen und ihr Beweis wie bei den ganzen Zahlen. Vergl. 42.

Aufgaben.

1. (72, a) Wieviel macht der 3te, 5te, 10te Theil von 217,5; von 21,75; von 2,175; von 0,2175; von 21,15; von 21,60?

2. Wieviel Franken macht 2300 Centimes; 1250 Centimes?

3. Wieviel Längen von 2,5 Meter sind enthalten in 107,5 M.; in 10,75 Meter; in 1,075 Meter; in 0,1075 Meter?

4. Wieviel Berliner Fuß, Berliner Ellen, Luxemburger Ellen, sind enthalten in 21227, 4270 Meter? (Siehe Aufg. 18, 19, 20. S. 78.)

5. 1 Pariser Klafter = 6 Fuß = 1,94904 Meter. Wieviel Meter macht ein Pariser Fuß = 12 Zoll? Wieviel macht 1 Pariser Zoll?

6. (72, b, c.) Welchen Quotienten und Rest geben folgende Divisionen: 2,3 : 4; 2,30 : 4; 2,300 : 4; 51 : 8; 51,0 : 8; 51,00 : 8; 51,000 : 8; 10 : 3; 10,0 : 3; 10,00 : 3; 10,000 : 3; 2,0 : 1,6; 2,00 : 1,6; 2,000 : 1,6; 0,2000 : 1,6; 0,20000 : 0,16?

7. (72, d, e.) Wieviel macht genau 3,5 : 4; 5,10 : 8; 0,3 : 12; 1,05 : 6; 1,05 : 0,6; 1,05 : 0,06; 9 : 0,024; 12 : 0,05?

8. (73) Wieviel macht 51 : 8; 7 : 4; 102 : 25; 3 : 125?

9. 250 holländische Florin = 528 Franken. Wieviel macht 1 holländischer Florin in Franken?

10. Wieviel macht 1 Franken in holl. Florin? (Mit 4 Dezimalen zu rechnen.)

11. (74) Welche genaue Resultate, oder welche periodische Dezimalzahlen findet man durch folgende Divisionen: 23 : 12; 27 : 12; 0,9 : 1,2; 2 : 3; 62 : 3; 1 : 9; 1 : 99; 1 : 999; 2 : 9; 2 : 99; 2 : 999; 1 : 3; 1 : 33; 1 : 333; 4 : 9; 5 : 99; 6 : 99; 7 : 99; 8 : 99, 9 : 99; 1 : 11; 25 : 99; 1, 35 : 0, 06; 1,7 : 0,08?

12. Wieviel Meter Tuch erhält man für 72,50 Franken, wenn der Meter 3,75 kostet?

13. Für 9 Franken hat man 3,75 Meter gekauft; was kostete der Meter?

14. Wieviel Einwohner leben im Durchschnitt auf einer □ Meile a) in jedem der österreichischen und preußischen Länder; b) in den deutschen Ländern Oesterreichs; c) in den deutschen Ländern Preußens; d) in den andern Ländern Oesterreichs; e) in den andern Ländern Preußens; f) in Gesammtösterreich; g) in Gesammtpreußen? (s. S. 46.)

15. So oft man mir mein Geld verdoppeln will, sagt Jemand, gebe ich den Armen 8 Franken. Man verdoppelt es ihm viermal: er gibt viermal 8 Franken den Armen, und es bleibt ihm nichts übrig. Wieviel hatte er?

16. Jemand kauft Leinwand zu 2,50 den Meter und erhält für 300 Franken vier gleichgroße Stücke und noch 8 Meter. Wie groß ist ein Stück?

17. Ein Handwerksmann verdient jeden Werktag 4,50 Franken; er will den vierten Theil seines Geldes sparen; wieviel darf er jeden Tag (Sonn- und Werktag) verzehren?

18. Man bezahlt einem Taglöhner täglich 1,25 Fr., um einen Graben aufzuwerfen. Wieviel Meter muß er in 18 Tagen ausgraben, wenn der Meter Graben nur 0,15 Fr. kosten soll?

19. Ein Forstbesitzer überläßt 4 Arbeitern das Fällen eines Waldes von einem Hektare. Er verspricht ihnen 0,50 Fr. von jedem Stère Holz und 1,05 Fr. von jedem Hundert Reiswellen. Der Schlag ergibt 200 Stères Holz und 2400 Wellen. Die Arbeiter waren 20 Tage damit beschäftigt; wieviel hat jeder täglich verdient?

20. Ein Landmann hat 5 Hektares Ackerland folgendermaßen bestellt: Einen Hektare hat er mit Waizen, einen mit Roggen, einen mit Kartoffeln, einen mit Klee und einen mit Kohl angebaut. Der erste ergab 20 Hektoliter Waizen und 3340 Kilogramm Stroh, der zweite 30 Hektoliter Roggen und 5250 Kilogramm Stroh, der dritte 125 Hektoliter Kartoffeln, der vierte 7053,15 Kilogramm Klee (als Heu gewägt), der fünfte 20000 Kohlköpfe. Den Waizen verkaufte er zu 18 Fr. den Hektoliter, den Roggen zu 14 Fr. den Hektoliter, das Stroh zu 28 Fr. per tausend Kilogramm, die Kartoffeln zu 2,18 Fr. den Hektoliter, den Kohl zu 0,05 Fr. per Kopf. Die Kosten für Ackern, Dünger und Erndten betrugen für den Waizen 171 Fr.; für den Roggen 159 Fr.; für den Klee 38 Fr.; für die Kartoffeln 199,50 Fr.; für den Kohl 234,60 Fr. Wieviel ertrug jeder einzelne Hektare?

21. Ein Landmann überläßt den Taglöhnern zum Lohn für die Erndte, die sie ihm machen, den 15ten Theil des Getreides und den 7ten Theil des Heues. Die Erndte ergibt 141 Hektoliter Waizen zu 18 Fr.; 40 Hektoliter Roggen zu 13,50 Fr.; 54 Hektoliter Buchwaizen zu 8,50 Fr.; 60 Hektoliter Hafer zu 8 Fr. den Hektoliter und 42500 Kilogramm Heu zu 32 Fr. das Tausend Kilogramm. Wäre es für ihn nicht vortheilhafter gewesen, diese Erndte im Taglohn zu 1,35 Fr. machen zu lassen? Die Erndte hat sich auf 16 Hektares Ackerland und 10 Hektares Wiese erstreckt; und zur Erndte von 1 Hektare Ackerland sind 15 Tage, zu der eines Hektare Wiese 11 Tage erfordert.

Metrisches Maßsystem.

77. Die Maße, welche am meisten verbreitet sind, und die meiste Verbreitung verdienen, sind die des **metrischen**

Systems. Dieselben sind in Frankreich, Spanien, den Niederlanden, Belgien und dem Großherzogthum Luxemburg (seit 1842) gesetzlich vorgeschrieben. Dieses System hat die Vortheile 1) daß die höhern Vergleichsgrößen derselben Gattung nach dem allgemeinen Numerationsgesetze Zehner, Hunderte, Tausende der niedrigern sind, wodurch die Rechnungen sehr erleichtert werden; 2) daß die verschiedenen Gattungen von Maßen von einer der Natur entnommenen Grundeinheit abgeleitet sind. Diese **Grundeinheit** hat man gefunden indem man den Quadranten des Meridians (d. h. den Theil des Meridians zwischen dem Nordpol und dem Aequator) theils ausmaß, theils berechnete[1]), und davon, ganz nach dem Grundwesen dieses Systems, nach dem sich Alles in 10, 100, 1000, u. s. w., Theile theilt, den 10000000sten Theil nahm. Dieser zehnmillionste Theil des Quadranten des Meridians ist der **Meter.**

78. **Längenmaße.**

Der Myriameter = 10000 = 2 Stunden.
Der Kilometer = 1000 Meter.
Der Hektometer = 100 Meter.
Der Dekameter = 10 Meter.
Der Meter.
Der Decimeter = 0,1 Meter.
Der Centimeter = 0,01 Meter.
Der Millimeter[2]) = 0,001 Meter.

[1]) Es wurde ein großer Theil des durch Paris gehenden Meridians direct gemessen, dann die Vergrößerung dieser Linie, welche durch die Erhebung über dem Meeresspiegel entstanden war, abgerechnet, und der übrige Theil mit Berücksichtigung der Abplattung, an den Polen berechnet. Da man aber diese Abplattung nicht genau kannte, beging man einen unbedeutenden Irrthum, den es außerordentlich schwer und durchaus unnütz wäre zu berichtigen.

[2]) Die Worte Meter = Maß, Myria = 1000, Kilo = 1000.

Anmerkung. Bei einigen Waaren bedient man sich bei uns auch wohl noch der Elle = 60 Centimeter, und des Stab = 2 Ellen.

79. **Flächenmaße.** Mit diesen Maßen werden alle Sachen gemessen, bei denen es nicht bloß auf die Länge, sondern auch auf die Breite ankommt. Ein rechtwinkliges Viereck von vier gleichen Seiten heißt ein Quadrat. Ein Quadrat, das 1 Schuh, oder 1 Meter, oder 1 Decimeter, oder 1 Meile lang und breit ist, heißt □ Schuh (sprich Quadratschuh) oder □ Meter (sprich Quadratmeter) [1]) oder □ Decimeter (sprich Quadratdecimeter) oder □ Meile (sprich Quadratmeile). Derartige Quadrate sind die natürlichsten Einheiten für die Bestimmung des Flächenmaßes. Die meisten Flächen lassen sich aber nicht direct mit solchen Quadraten messen; die Geometrie lehrt, wie man ihre Größe (Flächeninhalt) berechnen kann mit Hilfe einiger zu messenden geraden Linien. Am leichtesten läßt sich der **Flächeninhalt der rechtwinkligen Vierecke** berechnen, nach dem Grundsatze, daß bei gleicher Breite ein derartiges Viereck um so größer ist, je breiter es ist; und daß es bei gleicher Länge um so größer ist, je länger es ist.

Beispiel. Wie groß ist ein rechtwinkeliges Viereck, das 4 Meter lang und 1 Meter breit ist? Auflösung. Ein rechtwinkeliges Viereck, das 1 Meter lang und 1 Meter

Hekto = 100, Deka = 10, sind von der griechischen, die Worte Deci = Zehntel, Centi = Hunderttel, Milli = Tausendtel, von der lateinischen Sprache abgeleitet. — Statt 0,01 Meter schreibt man gewöhnlich 0Meter,01, statt 5,25 Meter und ebenso statt 5,25 Liter oder 5,25 Franken schreibt man gewöhnlicher 5Meter,25; 5Liter,25; 5Fr.,25

[1]) Heißt auf französisch mètre carré, was mitunter bezeichnet wird durch m^2.

breit ist, macht 1 □ Meter. Ein rechtwinkeliges Viereck, das 4 Meter lang und 1 Meter breit ist, ist 4 mal so groß, als jenes, und enthält also 4 □ Meter. Ein rechtwinkeliges Viereck, das 4 Meter lang und 3 Meter breit ist, ist 3 mal so groß, als das vorige, und enthält also 4×3=12 □ Meter.

Die Flächenmaße sind

Für Felder:

Der Hektare = 1 □ Hektometer = 10000 □ Meter.
Der Are = 1 □ Dekameter = 100 □ Meter.
Der Centiare = 1 □ Meter.

Für andere Gegenstände:

Der Quadratmeter = □ Meter.
Der □ Decimeter = 0,01 □ Meter.
Der □ Centimeter = 0,0001 □ Meter.
Der □ Millimeter = 0,000001 □ Meter.

80. **Maß für feste Körper.** Mit diesen Maßen werden alle Sachen gemessen, bei denen es nicht bloß auf die Länge und Breite, sondern auch auf die Dicke oder Höhe oder Tiefe ankommt. Ein Körper, der von 6 Quadraten begrenzt ist, also gleich hoch, breit und dick ist, heißt ein Würfel oder Kubus. Ein Kubus, der 1 Schuh oder 1 Meter oder 1 Decimeter lang, breit und dick ist, heißt Kubikschuh, Kubikmeter [1]) oder Kubikdecimeter. Derartige Kube sind die natürlichsten Einheiten für die Bestimmung des Körpermaßes. Die Körper lassen sich aber nicht direct mit denselben messen; die Geometrie lehrt, wie man ihre Größe (Kubikinhalt) mit Hilfe einiger zu messenden Linien berechnen kann. Am leichtesten läßt sich der **Kubikinhalt der Kör-**

[1]) Heißt auf französisch mètre cube, was mitunter bezeichnet wird durch m^3.

per, **welche von sechs rechtwinkeligen Flächen begrenzt sind,** berechnen nach dem Grundsatze, daß bei zwei gleich großen Ausdehnungen (Länge, Breite oder Dicke) der Kubikinhalt eines derartigen Körpers um so größer ist, je größer die dritte Ausdehnung ist. Beispiel. Wie groß ist ein von rechtwinkeligen Flächen begrenzter Körper, der 5 Meter lang, 2 Meter breit und 0,3 Meter dick ist?

Ein derartiger Körper, der 1 Meter lang, 1 Meter hoch und 1 Meter dick ist = 1 Kubikmeter.

Ein derartiger Körper, der 7 Meter lang, 1 Meter hoch und 1 Meter dick ist = 1×7=7 Kubikmeter.

Ein derartiger Körper, der 7 Meter lang, 2 Meter hoch und 1 Meter dick ist = 7×2=14 Kubikmeter.

Ein derartiger Körper, der 7 Meter lang, 2 Meter hoch und 0,3 lang ist = 14×0,3=5,2 Kubikmeter.

Außer dem Kubikmeter, mögen noch angewendet werden:

der Kubikdecimeter = 0,001 Kubikmeter,
der Kubikcentimeter = 0,001 Kubikdecimeter.

81. **Maße für Brennholz,**

Der Dekastère = 10 Stères.
Der Stère = 1 Kubikmeter.
Der Decistère = 0,1 Stère.

Anmerkung. Die Korde = 2 Stères[1]).

82. **Flüssigkeits- und Getreidemaß.**

Der Kiloliter = 1000 Liter.
Der Hektoliter = 100 Liter.
Der Dekaliter = 10 Liter.
Der Liter = 1 Kubikdecimeter.
Der Deciliter = 0,1 Liter.
Der Centiliter = 0,01 Liter.

[1]) Wenigstens nach dem Gebrauche, denn nach der gesetzlichen Bestimmung bezeichnet der Name metrische Korde einen Stère.

Anmerkung 1. Bei Flüssigkeiten hat aber der Gebrauch das Fuder = 6 Ohm von 4 Hotten, die Hotte zu 40 Liter beibehalten.

Anmerkung 2. Für Getreide gebraucht man gewöhnlich den Sester = 2 Dekaliter, und

das Malter = 2 Hektoliter.

83. Gewicht.

Metrische Tonne (millier) oder Schiffslast=1000 Kilog.
Metrischer Centner (quintal) = 100 Kilogramm.
Der Kilogramm = 1000 Gramm.
Der Hektogramm = 100 Gramm.
Der Dekagramm = 10 Gramm.
Der Gramm = das Gewicht eines Kubikcent. Wassers [1])
Der Decigramm = 0,1 Gramm.
Der Centigramm = 0,01 Gramm.
Der Milligramm = 0,001 Gramm.

Anmerkung. Im Großherzogthum Luxemburg versteht man unter Centner (quintal) 100 Pfund; 1 Kilogramm = 2 Pfund; 1 Pfund = 16 Unzen.

84. Geld.

Der Franken wiegt in Silbermünze 5 Gramm.
(0,9 der Münze sind Silber, 0,1 Kupfer.)
Der Décime = 0,1 Franken.
Der Centime = 0,01 Franken.

Bei gleichem Gewicht haben die französischen goldenen Münzen einen 15,5 mal größern und die französischen und luxemburgischen Kupfermünzen einen 20 mal geringern Werth, als das Silbergeld. Nach Franken zählt man das Geld nur in Frankreich, Belgien, der Schweiz und dem Groß-

[1]) Nämlich distillirten Wassers, in luftleerem Raum bei dem Wärmegrade gewägt, wo es am dichtesten ist (4° Centigrade).

herzogthum Luxemburg. Doch ist in den Niederlanden das Geld nach dem Dezimalfuße eingerichtet. 1 niederländischer Florin = 100 Cens.

Anmerkung. Von all' diesen Vergleichsgrößen bestehen gesetzliche Maße, so wie auch von der Hälfte und dem Doppelten einer jeden.

Aufgaben.

1. (77) Wieviel Meter gehen auf einen Grad, auf eine Minute des Meridians? (Vergl. S. 58, Aufgabe 16.)

2. Wieviel Meter beträgt eine französische Stunde, eine Seemeile oder belgische Stunde, eine deutsche Meile? 1 Grad des Meridians = 25 französische Stunden = 20 belgische Stunden = 15 geographische oder deutsche Meilen.

3. (78) Wieviel Meter macht 21,25 Hektometer; 3,2576 Kilometer; 1,02 Myriameter; 23,54 Decimeter; 21,35 Dekameter; 5 Centimeter; 3000 Millimeter; 26 Millimeter?

4. Wieviel Myriameter mißt der Meridian?

5. Wieviel Dekameter machen 21,25 Meter; 30 Meter; 21 Kilometer: 65 Centimeter; 3 Millimeter; 3 Hektometer; 7,535 Kilometer? Wieviel Decimeter macht jede von diesen Größen?

6. Auf einer Straße von 27 Kilometer stehen zwei Reihen Bäume die je 5 Meter von einander entfernt sind. Wieviel Bäume?

7. Wenn der Meter Diele 75 Centimes kostet, wieviel kosten 21 Meter 20 Centimeter?

8. Ein Pariser Fuß beträgt 0,32484 Meter (eigentlich 0,324839432 Meter). Wieviel Meter beträgt die Höhe des Mount Everest (27000 Fuß oder 27000'), der höchsten Spitze der Welt, des Dhawalagiri mit 26000' und des Montblanc, des höchsten Gipfels Europa's, mit 14800'?

9. Den wievielsten Theil des Erdradius beträgt jeder dieser Berge? Der Durchmesser eines Kreises = 2 Radius. Das Product des Durchmessers mit der Zahl π (sprich pi), welche ungefähr 3,1416 macht, gibt die Peripherie. Die Peripherie der Erdkugel = 4 Quadranten des Meridians.

10. (79) Wieviel □ Decimeter machen 4,5 Ares; 376 □ Centimeter; 6,25 □ Meter; 30000 □ Millimeter?

11. Wieviel □ Meter macht 6 □ Meter, 15 □ Decimeter; 2 Ares, 2 □ Meter, 2 □ Decimeter; 3 □ Meter, 25 □ Millimeter; 9 □ Meter; 90 □ Decimeter; 31265 □ Millimeter?

12. Wieviel Hektares, Ares und Centiares enthalten folgende Flächen 31256 Centiares; 50505 Centiares; 350 Centiares; 6000 Centiares?

13. Wieviel □ Meter, □ Decimeter und □ Centimeter enthalten folgende Flächen 3,15 □ Meter; 3,5 □ Meter; 3,05 □ Meter; 3,0005 □ Meter; 17,0505 □ Meter; 17,055 □ Meter; 0,003 □ Meter?

14. Das Haus der hl. Jungfrau zu Loretto ist 9,529 Meter lang und 4,175 Meter breit. Wieviel □ Meter ist es groß?

15. Ein Brett, das 6,25 Meter lang und 0,28 Meter breit war, kostete 2,80 Fr.; wie theuer hat man den □ Meter berechnet?

16. Die vier Wände eines Zimmers, das 7,80 Meter lang, 4,10 Meter breit und 2,50 hoch ist, sollen tapeziert werden. Das Papier ist 49 Centimeter breit; wieviel Meter braucht man, wenn man für Fenster und Thüre nichts abrechnet?

17. Wieviel □ Meter macht 1 □ Fuß (Pariser Fuß, siehe Aufgabe 5)?

18. Das Product der Peripherie eines Kreises mit dem halben Radius, beide in Meter oder Fuß, u. s. w., berechnet, gibt in □ Meter oder □ Schuh die Oberfläche dieses Kreises. Wie groß ist demnach ein Kreis, dessen Radius = 2 Fuß; oder dessen Peripherie = 10,50 Meter? (Vergl. Aufgabe 9.)

19. Man weiß, daß die Oberfläche einer Kugel genau 4 mal der Oberfläche eines Kreises von demselben Radius gleich ist. Wieviel □ Meilen (geographische Meilen) beträgt die Oberfläche der Erdkugel? (Vergl. Aufgabe 2.)

20. Ein Schafstall, der 10 Meter lang und 10 Meter breit ist, faßt 100 Schafe; der Stall verliert durch einen neu angelegten Weg 2M,50 in der Breite und 1M,60 in der Breite; wieviel Schafe wird er noch fassen?

21. Was kosten 5 Hektares 35 Ares 25 Centiares, wenn der Hektare 2900 Franken bezahlt wird?

22 Drei Brüder sollen 5 Grundstücke theilen; das erste ist 150 Meter lang und 35,50 Meter breit; das zweite 80 Meter lang und 90,25 Meter breit; das dritte 95 Meter lang und 22,50 Meter breit; das vierte 150 Meter lang und 19,50 Meter breit; das fünfte 40 Meter lang und 15,30 Meter breit. Wieviel Ares bekommt jeder, wenn sie in gleich große Theile theilen?

23. Ein Hektoliter Roggen wiegt 70 bis 72 Kilogramm und das Stroh von einem Hektoliter 175 Kilogramm. Ein Hektare bringt durchschnittlich 17 Hektoliter Roggen. Wieviel Roggen und Stroh geben 8 Hektares 22 Ares 53 Centiares?

24. (80) Wieviel Kubikmeter, Kubikdecimeter und Kubikcentimeter macht 3,205 Kubikmeter; 4,5 Kubikmeter; 7,54 Kubikmeter; 2,215375 Kubikmeter; 125,10053 Kubikmeter; 45,1995 Kubikmeter; 0,0005 Kubikmeter; 0,05 Kubikmeter; 1235 Kubikdecimeter; 1,055 Kubikdecimeter; 0,0045 Kubikdecimeter; 1,0005 Kubikdecimeter; 2100 Kubikmillimeter; 2000000 Kubikmillimeter; 3005 Kubikmillimeter?

25. Man schreibe an 3 Kubikmeter 115 Kubikcentimeter und 500 Kubikmillimeter; 2 Kubikmeter 53 Kubikcentimeter 560 Kubikmillimeter; 1 Kubikmeter 5 Kubikcentimeter 50 Kubikmillimeter; 3 Kubikmeter 25 Kubikmillimeter.

26. Wieviel Kubikmeter enthält eine Mauer, die 10 Meter lang, 4,50 Meter hoch und 62 Centimeter breit ist?

27. Wieviel kostet eine Maurerarbeit von 3 Kubikmeter 750 Kubikdecimeter, die zu 28,50 Fr. den Kubikmeter bezahlt wird?

28. (81) Wieviel Stères Holz braucht man in einem Jahre für 3 Oefen, wenn man täglich für einen Ofen 0,25 Decistère braucht? Man nimmt an, daß 6 Monate (zu 30 Tagen) eingeheizt wird.

29. Das Kordenmaß ist 2 Meter lang; wie hoch muß es sein, wenn das Scheitholz 1,15 Meter lang ist?

30. Man kaufte in einem Walde 7,50 Stères Holz zu 66 Franken und bezahlte 50 Centimes Fuhrlohn für den Stère; aus einem weiter entfernten Walde bezog man 9 Stères für 72 Franken und bezahlte 1,25 Franken Fuhrlohn für den Stère; welcher Handel war der vortheilhaftere?

31. Wieviel Liter enthält ein viereckiges Gefäß, das inwendig 1 Meter lang, 1 Meter breit und 1 Meter tief ist; wieviel ein vier-

eckiger Trog, der inwendig 1,20 Meter lang, 7 Decimeter breit und 5 Decimeter tief ist?

32. Wieviel Liter enthält ein cylinderförmiges Gefäß (z. B. ein Eimer, der überall gleich weit ist), das 60 Centimeter hoch, und dessen Boden 55 Centimeter im Durchmesser hat? Den Kubikinhalt eines Cylinders in Kubikmeter, Kubikfuß, u. s. w., findet man, wenn man die □ Meter, □ Fuß des Flächeninhaltes der Grundfläche (in obigem Beispiel des Bodens) mit der in Meter oder Fuß berechneten Höhe multiplizirt.

33. Wieviel kostet eine Flasche Wein, wenn man aus dem Fuder 1200 Flaschen macht, und der Liter 50 Centimes kostet?

34. Wieviel kostet die Ohm, die Hotte, der Liter, wenn das Fuder 120 Thaler kostet?

35. Wieviel Sous kostet der Liter, wenn die Hotte 12 oder 15 oder 18 Franken kostet?

36. Man verkauft 22 Hektoliter 70 Liter Waizen zu 26 Centimes das Kilogramm. Ein Hektoliter wiegt 76 Kilogramm. Was erhält man?

37. Im Durschnitt wiegt ein Hektoliter Waizen 75 Kilogramm; ein Hektoliter Gerste 64 Kilogramm, und ein Hektoliter Hafer 47 Kilogramm. Welches ist demnach das durchschnittliche Gewicht eines Malters Waizen, Gerste und Hafer?

38. Wieviel wiegt die Erndte eines Haferfeldes von 3 Hektares 10 Ares 15 Centiares? Vom Hektare erndtet man 28 Hektoliter 17 Liter.

39. (82) Wieviel Gramm macht 3 Kilogramm; 2,5 Hektogr.; 3,04 Dekagramm; 20 Decigramm; 1,5 Decigramm; 500 Centigramm; 50 Centigramm; 5 Centigramm?

40. Wieviel Kilogramm wiegt ein Fuder Wasser; ein Hektoliter; ein Kiloliter; ein Kubikcentimeter Wasser?

41. Wenn der Kilogramm 2,40 Franken kostet, was kosten 3 Kilogramm 25 Dekagramm?

42. Eine Waare wiegt mit der Kiste 72 Kilogramm 20 Gramm; die Kiste wiegt 5 Kilogramm 36 Dekagramm. Wieviel wiegt die Waare?

43. Was kostet ein Zuckerhut von 9 Kilogramm 250 Gramm, wenn das Pfund 95 Centimes kostet?

44. Wenn der Kilogramm Brod 30 Centimes kostet, wieviel Brod hat eine Familie verzehrt, welche dem Bäcker 156 Franken bezahlt hat?

45. Wenn 125 Gramm einer Waare 1 Franken kosten, was kosten a) 5 Kilogramm 75 Gramm, b) 1 Pfund, c) 1 Unze, d) 3 Pfund 4 Unzen?

46. Wenn das Pfund 1 Thlr. 10 Sgr. kostet, was kostet der Hektogramm?

47. Ein Landmann hat 21 Stück Vieh, welche zusammen 6850 Kilogramm wiegen; welche Fläche muß er mit Futterkräutern anbauen, um sie während 122 Tagen zu füttern, wenn täglich 15 Kilogramm 750 Gramm Futter für je 100 Kilogramm lebendes Gewicht Vieh erforderlich sind. Die Futterkräuter geben 2 Mahden, und jede Mahde gibt durchschnittlich 357 Kilogramm 895 Gramm von 1 Are?

48. Wieviel Arbeiter, die täglich 10 Stunden arbeiten, hat man nöthig, um in 3 Tagen 1 Hektare 50 Ares Waizen zu mähen? Man schätzt den Ertrag auf 4860 Kilogramm per Hektare, und man nimmt an, daß ein Arbeiter in der Stunde 80 Kilogramm 750 Gramm mähe. Wieviel Garben von 11 Kilogramm gibt die Erndte?

49. Ein Hektare Brachland, welches als Weide benutzt wird, gibt während drei Jahren durchschnittlich einen Rohertrag von 25,50 Fr. Welchen Verlust hat ein Landmann erlitten, welcher das Brachfeld auch wohl mit Klee hätte einsäen können? Der Kleeertrag hätte als Heu jährlich 7953 Kilogramm 155 Gramm betragen, zu 33 Franken per 1000 Kilogramm. Außerdem wäre die Weide des Brachfeldes zweimal so viel werth gewesen, als die des Kleefeldes.

50. Wieviel wiegt ein Liter reines Wasser, ein Deciliter, ein Centiliter, ein Milliliter?

51. Die Zahl, mit welcher man das Gewicht reinen Wassers (zu 4° Centigrade) multipliziren muß, um das Gewicht desselben Volumens (Kubikinhaltes) einer Substanz zu finden, heißt das specifische Gewicht dieser Substanz. Der Hektoliter von Seewasser wiegt 102,63; von Wasser aus dem todten Meer wiegt 124,03; von Milch wiegt 103; von Olivenöl wiegt 91,53 Kilogramm, welches ist das specifische Gewicht dieser Substanzen?

52. Wieviel wiegen 180 Liter Bordeaux- und 160 Liter Burgunderwein? Das specifische Gewicht des ersten ist 0,994, das des letzteren 0,991.

53. Das specifische Gewicht des gegossenen Goldes beträgt 19,26; das des getriebenen (gehämmerten) Goldes 19,36; das des gegossenen Silbers 10,47; das des Bleies 11,35; das des gegossenen Kupfers 8,85; das des gegossenen Eisens 7,20, das des geschmiedeten Eisens 7,788. Welches ist der Kubikinhalt eines Pfundes dieser Körper?

54. Wieviel verliert ein Kubikcentimeter gegossenen Goldes und Eisens an seinem Kubikinhalt, wenn es mit dem Hammer getrieben oder geschmiedet wird?

55. Wieviel Kubikdecimeter enthält eine aus Gold gegossene Kugel von 1 Decimeter Durchmesser? Man findet den Kubikinhalt (in Kubikdecimeter) einer Kugel, wenn man ihre Oberfläche (in □ Decimeter) mit dem 3ten Theil des Radius (in Decimeter) multiplizirt. (Vergl. Aufgabe 19); wie schwer ist dieselbe (Vergl. Aufgabe 53), wieviel ist sie werth? Ein Kilogramm reines Gold hat einen Werth von 3444,44 Franken.

56. (84) Wieviel Centimes macht 1 Décime; wieviel Décimes macht ein Zweifrankenstück; 1 Fünffrankenstück; 50 Centimes; 0,5 Franken; 4,05 Franken; 3,015 Franken; 1,5 Centimes; 1,05 Centimes? Wieviel Franken macht 300 Centimes; 375 Centimes; 10 Centimes; 26 Décimes; 100 Décimes?

57. Wieviel Stücke von 1 Franken, von 2 Franken, von 5 Franken gehen auf 1 Kilogramm?

58. Wieviel Goldstücke von 50 Franken gehen auf 1 Pfund?

59. Wieviel Kupfermünzen von 5 Centimes und von 10 Centimes braucht man für 1 Pfund, für 1 Kilogramm?

60. Wieviel Liter reinen Wassers muß man nehmen, um 250 Franken in Silber, und 250 Franken in Kupfermünze aufzuwiegen?

61. Wieviel kupferne Décimes muß man zu 30 Fünffrankenstücken hinzufügen, um das Gewicht von 1,25 Kilogramm zu vervollständigen?

62. Ein Fünffrankenstück wiegt nur mehr 23,8 Gramm; wieviel ist von seinem Gewicht durch den Gebrauch verrieben worden?

63. Wieviel verzehrt eine Person jährlich, welche jeden Monat 135,25 Franken ausgibt?

64. Wieviel wiegen 3000 Franken in Gold, in Silber und in Kupfer?

65. Da es nicht möglich ist, den Münzen mit der letzten Genauigkeit ihr exaktes Gewicht zu geben, so wird bei den Goldstücken von 100 Fr. geduldet, daß sie 1 Tausendtel ihres gesetzlichen Gewichtes schwerer oder leichter seien; bei denen von 50 und 20 Fr. wird eine Abweichung von 2 Tausendtel, bei denen von 5 Franken wird eine Abweichung von 3 Tausendtel geduldet. Bei den Silbermünzen von 5 und 2 Franken beträgt die geduldete Abweichung 3 Tausendtel; bei den Kupfermünzen von 10 und 5 Centimes 1 Hunderttel ihres Gewichtes. Welches ist das höchste und leichteste Gewicht, das diese Münzen haben dürfen?

66. Die Goldstücke von 100 Franken haben einen Durchmesser von 35 Millimeter; die von 20 Franken einen Durchmesser von 21 Millimeter; die silbernen Fünffrankenstücke von 37 Millimeter; die Zweifrankenstücke von 27 Millimeter; die Franken von 23 Millimeter; die Décimes von 30 Millimeter und die 5 Centimesstücke von 25 Millimeter. Wieviel 5 Centimesstücke muß man in eine gerade Reihe legen, wieviel muß man deren zu 20 Décimes hinzufügen, wieviel Fünffrankenstücke muß man zu 10 Zweifrankenstücken fügen, wieviel Zweifrankenstücke zu 20 Franken, um die Länge des Meters zu finden, wenn man die Unebenheiten am Rande nicht berücksichtigt?

67. Wieviel in eine Reihe gelegte 100 Frankenstücke geben die Länge einer Reihe von 5 Zwanzigfrankenstücken?

Die Brüche oder Fractionen.

Numeration der Brüche.

85. Eine Größe, die genau aus 1, 2, 3 andern Größen und überhaupt aus einer ganzen Zahl von andern Größen besteht, heißt ein **Vielfaches** (Multiplum) dieser andern, und diese heißt **Maß** von jener. So ist die Linie A ———————— ein Viel-

faches der Linie B ——— und der Linie C ——, der Thaler ein Multiplum von 15 Silbergroschen, von 10, von 6, von 5, von 1 Silbergroschen, jede ganze Zahl ein Vielfaches der Einheit; und die Linien B und C sind Maße der Linie A; 10, 6, 5, 1 Silbergroschen sind Maße des Thalers; und die Einheit ist ein Maß jeder ganzen Zahl. Man pflegt dieses auch auszudrücken, indem man sagt, die Linie A sei **theilbar** durch die Linien B und C; der Thaler sei theibar durch 15 Silbergroschen, u. s. w.

Das kleinste Vielfache einer Größe ist diese Größe selbst, das zweitkleinste das Doppelte dieser Größe, das drittkleinste das Dreifache, u. s. w., und das größte Maß einer Größe ist diese Größe selbst, das zweitgrößte die Hälfte derselben; darauf folgen als Maße das Drittel, das Viertel, das Fünftel dieser Größe, u. s. w.

86. Eine Größe, die ein Maß ist von zwei oder mehreren andern, heißt ein **gemeinschaftliches Maß** dieser andern. So ist z. B. 25 Centimes ein gemeinschaftliches Maß des Frankens, des Thalers und der Summe von 1,50 Fr.

87. Um eine Größe zu **messen** oder zu **bezeichnen**, die kein Vielfaches der Einheit ist und sich also nicht durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt, verfährt man entweder, wie in Nr. 56 gezeigt wurde, oder folgendermaßen. Man sucht ein gemeinschaftliches Maß der Einheit und dieser Größe;[1]) gibt es solche und hat man eines gefunden, so bedient man sich desselben als einer neuen Vergleichsgröße zur Bestimmung der Größe. Man mißt nun, wie oft dieses ge-

[1]) Hier müßten wir zuerst zeigen, wie man ein solches gemeinschaftliche Maß findet; doch wollen wir dieses etwas schwierige Problem für später aufsparen.

meinschaftliche Maß in der Einheit enthalten ist: die Zahl, welche dieses ausdrückt,[1]) heißt **Renner** und bestimmt die Größe des gemeinschaftlichen Maßes; ferner mißt man, wie oft dasselbe in der zu bestimmenden Größe enthalten ist: die Zahl, welche dieses ausdrückt,[2]) heißt **Zähler.**

88. Die zu bestimmende Größe wird alsdann **angeschrieben,** indem man den Renner unter, und den Zähler über einen Querstrich setzt. Eine derartige Zahl heißt ein **Bruch** oder eine Fraction. Es sei zum Beispiel der Franke die Einheit, und man wolle einen Thaler messen. Ein gemeinschaftliches Maß des Frankens und des Thalers sind 5 Sous; dieselben sind in der Einheit 4 mal, im Thaler 15 mal enthalten, also 1 Thaler $= {}^{15}/_{4}$ Franken. Oder: Ein gemeinschaftliches Maß des Frankens und des Thalers ist ein Silbergroschen. Derselbe ist im Franken 8 mal, im Thaler 30 mal enthalten; also 1 Thaler $= {}^{30}/_{8}$ Franken. Oder: Ein gemeinschaftliches Maß des Frankens und Thalers ist ein Centime. Derselbe ist im Franken 100 mal, im Thaler 375 mal enthalten; also 1 Thaler $= {}^{375}/_{100}$ Franken.

89. Wäre der Thaler die Einheit, und der Franken die zu bestimmende Größe gewesen, so hätte man gefunden 1 Franken $= {}^{4}/_{15}$ Thlr. $= {}^{8}/_{30}$ Thlr. $= {}^{100}/_{375}$ Thaler. Und im Allgemeinen wenn $A = {}^{5}/_{7}\ B$, d. h. wenn das gemeinschaftliche Maß 7 mal in B und 5 mal in A enthalten ist, so ist $B = {}^{7}/_{5}\ A$.

90. Der Renner des Bruches ${}^{15}/_{4}$ Franken zeigt an, daß das gemeinschaftliche Maß 4 mal im Franken enthal-

[1]) Eine ganze Zahl, warum?

[2]) Ebenfalls eine ganze Zahl, warum?

ten ist; dieses gemeinschaftliche Maß ist also ein Viertel Franken (34); und darum wird obiger Bruch, welcher 15 solcher Maße enthält, **ausgesprochen:** 15 Viertel Franken oder 15 Viertel von einem Franken. $^8/_{30}$ Thaler = 8 Dreißigstel Thaler = 8 Dreißigstel von dreißig Silbergroschen.

91. Bei dem Bruche $^4/_5$ Größe zeigt der Nenner an, daß das gemeinschaftliche Maß 5 mal in der Größe enthalten ist; man findet also dieses, indem man die Größe in 5 gleiche Theile theilt. Der Zähler zeigt an, daß dieses gemeinschaftliche Maß 4 mal im Bruche enthalten ist; man findet also den **Werth des Bruches,** wenn man das gefundene gemeinschaftliche Maß 4 mal nimmt. Beispiel. Welches ist der Werth von $^4/_5$ Franken? Das gemeinschaftliche Maß ist 5 mal im Franken enthalten und beträgt mithin 20 Centimes; es ist 4 mal in $^4/_5$ Franken enthalten, und dieser Bruch macht demnach 80 Centimes. Oder: 1 Franken = 100 Centimes; 1 Fünftel Franken = 100 : 5=20 Centimes; 4 Fünftel Franken = 20×4=80 Centimes.

92. Eine Größe kann also durch verschiedene Brüche richtig bezeichnet werden, und diese Bezeichnungen hängen ab von der Wahl des gemeinschaftlichen Maßes. In der durch $^{15}/_4$ bezeichneten Größe ist das gemeinschaftliche Maß 15 mal enthalten, während es 4 mal in der Einheit enthalten ist. Theilt man dieses gemeinschaftliche Maß in 2 gleiche Theile, so ist ein solcher Theil 2×15=30 mal in jener Größe und 2×4=8 mal in der Einheit enthalten. Ein solcher Theil ist also auch gemeinschaftliches Maß der Größe und der Einheit, und mit dessen Hilfe kann man die Größe auch bezeichnen durch $^{30}/_8$. Ebenso hätte man das gemeinschaftliche Maß in 7 gleiche Theile theilen können. Ein

derartiger Theil ist $7 \times 15 = 105$ mal in der Größe und $7 \times 4 = 28$ in der Einheit enthalten, und mithin läßt sich auch jene Größe bezeichnen durch $^{105}/_{28}$. Demnach ist

$$\frac{15}{4} = \frac{2 \times 15}{2 \times 4} = \frac{30}{8} = \frac{7 \times 15}{7 \times 4} = \frac{105}{28}.$$

Der Werth eines Bruches erleidet also keine Veränderung, wenn man Zähler und Nenner mit derselben ganzen Zahl multiplizirt. (Vergl. 60 und 11.)

93. Sind Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe ganze Zahl theilbar, so wird auch der Werth eines Bruches nicht verändert, wenn man Zähler und Nenner durch diese Zahl dividirt.

Beispiel. $\frac{105}{28} = \frac{105 : 7}{28 : 7} = \frac{15}{4}$.

Beweis. Da $\frac{15}{4} = \frac{7 \times 15}{7 \times 4} = \frac{105}{28}$, muß auch $\frac{105}{28}$ gleich sein $\frac{15}{4}$.

Auf diese Weise werden Brüche **vereinfacht**. Man versäumt es in der Regel nie, die Brüche, die sich vereinfachen (heben) lassen, zu vereinfachen, weil dadurch die Rechnungen erleichtert werden, und der einfachere Ausdruck eine klarere Vorstellung von dem Werthe des Bruches gibt. $^1/_2$ ist z. B. klarer als $^{178}/_{356}$.

94. Der Grundsatz von Nr. 92 gibt ein Mittel an die Hand, verschiedene Brüche vermittelst desselben gemeinschaftlichen Maßes auszudrücken, d. h. dieselben in Brüche mit demselben Nenner zu verwandeln, oder, wie man zu sagen pflegt, verschiedene **Brüche unter einerlei Benennung zu bringen**. Es seien z. B. $^2/_3$, $^2/_4$ $^5/_6$, $^7/_{15}$, $^{11}/_{30}$, $^{21}/_{35}$. Dem ersten Bruche kann man, indem man Zähler und Nenner mit 2 multiplizirt, zum Nenner geben 2×3; oder indem man mit 3 multiplizirt 3×3; und so überhaupt jede Zahl, welche ein exactes Product ist von 3. Dem zweiten

Bruche kann man jede Zahl zum Nenner geben, welche ein exactes Product ist von 4. Dem dritten kann man jede Zahl zum Nenner geben, welche ein exactes Product von 6 ist, u. s. w. Allen Brüchen kann man jede Zahl zum Nenner geben, die zugleich ein exactes Product ist von 3, von 4, von 6, von 15, von 30 und von 35. Eine solche Zahl ist das Product aller Nenner $3\times4\times6\times15\times30\times35 = 1134000$. Um dem Bruche $^2/_3$ diesen Nenner zu geben, brauche ich nur Zähler und Nenner mit $4\times6\times15\times30\times35$, d. i. dem Producte der andern Nenner zu multiplizieren.

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times4\times6\times15\times30\times35}{3\times4\times6\times15\times30\times35}=\frac{756000}{1134000}$$

Aehnlich verhält es sich mit den übrigen Brüchen.

Häufig findet man aber eine kleinere Zahl, welche ebenfalls ein exactes Product aller Nenner ist,[1] und dann ist dieselbe, weil sie einfachere Brüche gibt, vorzuziehen. Eine solche ist hier 840 und sogar 420. Um 420 zu finden, muß man den Nenner des ersten Bruches multiplizieren mit 140, und um den Werth des Bruches nicht zu verändern, muß man ebenfalls den Zähler mit 140 multiplizieren. Also $^2/_3 = {}^{280}/_{420}$. Wir hätten aber, um die Rechnung zu erleichtern, nach der Bemerkung der vorigen Nummer, den zweiten Bruch, dessen Zähler und Nenner durch 2, und den letzten, dessen Zähler und Nenner durch 7 theilbar ist, zuerst vereinfachen sollen; wir hätten alsdann gefunden, daß obige Brüche $= {}^2/_3,\ {}^1/_2,\ {}^5/_6,\ {}^7/_{15},\ {}^{11}/_{30},\ {}^3/_5$, daß die Zahl 30 ein exactes Product aller Nenner ist, und daß diese Brüche $= {}^{20}/_{30},\ {}^{15}/_{30},\ {}^{25}/_{30},\ {}^{14}/_{30},\ {}^{11}/_{30},\ {}^{18}/_{30}$.

95. Wenn das gemeinschaftliche Maß nicht so oft in

[1]) Wie man auf sicherm Wege die **kleinste Zahl** findet, die ein Vielfaches mehrerer andern ist, wird später gezeigt.

einem Bruche als in der Einheit enthalten ist, d. h. wenn der Zähler eines Bruches kleiner ist, als der Nenner, so ist dieser Bruch kleiner als die Einheit, und heißt ein **ächter Bruch.** $^4/_5$ ist also kleiner als die Einheit.[1]) Ist das gemeinschaftliche Maß ebenso oft im Bruche, als in der Einheit enthalten, d. h. ist der Zähler eines Bruches dem Nenner gleich, so ist dieser Bruch der Einheit gleich. Also $^5/_5=1=^{13}/_{13}$. Ist das gemeinschaftliche Maß öfter im Bruche, als in der Einheit enthalten, d. h. ist der Zähler eines Bruches größer als der Nenner, so ist dieser Bruch größer als die Einheit. $^{15}/_4$ ist also größer als die Einheit.[2]) In den beiden letzten Fällen heißen die Brüche **unächte Brüche.**

96. Eine Größe, die aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, heißt eine **gemischte Zahl.** 5 Wochen und $^2/_7$ Woche ist eine gemischte Zahl, welche geschrieben wird $5^2/_7$ Woche. Das gemeinschaftliche Maß ist hier 7 mal in der Einheit enthalten, also $7\times5=35$ mal in den 5 Einheiten und 2 mal im Bruche, mithin 37 mal in der gemischten Zahl. Diese macht also $^{37}/_7$ Woche.

Um eine gemischte Zahl in einen unächten Bruch zu verwandeln, braucht man nur zum Zähler des Bruches das Product der ganzen Zahl durch den Nenner zu addiren.

Um einen unächten Bruch in eine gemischte Zahl zu verwandeln, dividirt man den Zähler durch den Nenner, und schreibt dann den Quotienten an als ganze Zahl und den Nenner als Zähler des neuen Bruches. Beispiel. $^{37}/_7=5^2/_7$. Die Einheit enthält hier

[1]) Man pflegt dieses auf folgende Weise auszudrücken $^4/_5<1$.

[2]) Man pflegt dieses auf folgende Weise auszudrücken $^{15}/_4>1$.

7 Maße (Siebentel) und der Bruch 37; mithin enthält der Bruch 5 Einheiten und 2 Maße (Siebentel), oder $^{37}/_{7}=5^{2}/_{7}$. Ebenso hätte man gefunden $^{35}/_{7}=5=5^{0}/_{7}$ oder 5 Einheiten und kein Siebentel.

Anmerkung. $^{5}/_{1}$ macht demnach 5; und statt 12 kann man schreiben $^{12}/_{1}$. $^{1}/_{1}=1$. Man kann also jede ganze Zahl betrachten als den Zähler eines Bruches, dessen Nenner 1 ist.[1])

Aufgaben.

1. (85) Man suche in Silbergroschen, in Centimes, in Sous, je sechs verschiedene Maße des Thalers.

2. Man suche ebenfalls in Silbergroschen, Sous und Centimes, je vier verschiedene Maße des Frankens.

3. Welche von folgenden Summen sind Maße von 3 Franken? 2 Fr.; 1,50 Fr.; 1,20 Fr.; 1 Fr.; 75 Centimes; 60 Cent.; 55 Cent.; 50 Cent.; 40 Cent.; 35 Cent.; 30 Cent.; 25 Cent.; 20 Cent.; 15 Cent.; 13 Cent.; 12 Cent.; 10 Cent.; 9 Cent.; 8 Cent.; 7 Cent.; 6 Cent.; 5 Cent.; 4 Cent.; 3 Cent.; 2 Cent.; 1 Cent.

4. Welche von folgenden Längen sind durch 12 Centimeter theilbar: 1,50 Meter; 2 Meter; 3 Meter; 6 Decimeter; 1,02 Meter; 4 Meter; 5 Meter; 6 Meter; 12 Decimeter; 2,04 Meter?

5. Welche sind die 6 größten Maße von 60 Centimes?

6. Man berechne mit drei Dezimalstellen die 6 größten Maße des Meters.

7. (86) Welche von folgenden Längen sind gemeinschaftliche Maße des Meters und der Elle: 1 Centimeter; 2 Centimeter; 3 Centimeter; 4 Centimeter; 5 Centimeter; 6 Centimeter; 10 Centimeter; 12 Centimeter; 15 Centimeter; 20 Centimeter; 25 Centimeter; 30 Centimeter?

8. Man suche acht gemeinschaftliche Maße von dem halben Franken (= 50 Centimes = 4 Silbergroschen) und dem Drittel Thaler (= 125 Centimes = 10 Silbergroschen).

[1]) Wie ergibt sich dieses aus der Begriffsbestimmung des Bruches (87 und 91)?

9. Man suche drei gemeinschaftliche Maße des Dutzend und des Hunderts.

10. Man suche gemeinschaftliche Maße a) von 1 Franken und 2 Franken, b) von 1 Thaler und 3 Thaler, c) von 2 Gulden und 12 Gulden, (s. Aufgabe 9, S. 58). Gibt es auch Maße von 1 Franken, 1 Thaler, 3 Gulden, die nicht Maße sind von 2 Franken, 3 Thaler oder 9 Gulden; warum?

11. (87, 88) Mit Hilfe aller gemeinschaftlichen Maße, die man in Aufgabe 7 gefunden hat, bezeichne man a) wieviel Ellen 1 Meter macht und b) wieviel Meter eine Elle macht.

12. Mit Hilfe der gemeinschaftlichen Maße, die man in Aufgabe 8 gefunden hat, bezeichne man a) wieviel halbe Franken ein Drittel Thaler macht und b) wieviel Drittel Thaler ein halber Franken macht.

13. a) Wieviel Dutzend macht ein Hundert; b) wieviel Hundert macht 1 Dutzend? (S. Aufgabe 9.)

14. Man bezeichne durch Brüche a) wieviel Franken 2 Franken und wieviel 2 Frankenstücke ein Franken macht; b) wieviel Thaler 3 Thaler macht, und wieviel Summen von 3 Thaler 1 Thaler macht; c) wieviel Zweiguldenstücke 12 Gulden und wieviel Summen von 12 Gulden 2 Gulden macht? (S. Aufgabe 10.)

15. Wieviel Thaler machen 10 Silbergroschen; 20 Sgr.; 10+20 oder 30 Sgr.; 1 Thlr. 10 Sgr.; 1 Thlr. 20 Sgr.; 2 Thlr.; 2 Thlr. 10 Sgr.; 2 Thlr. 20 Sgr.; 3 Thlr.? Man nehme als gemeinschaftliches Maß a) 10 Sgr., b) 5 Sgr., c) 3 Sgr. 4 Pf., d) 2 Sgr. 6 Pf., e) 2 Sgr., f) 1 Sgr. 8 Pf.

16. Welche von jenen Summen lassen sich durch das gemeinschaftliche Maß 15 Sgr., 20 Sgr., 30 Sgr., bezeichnen? Welche Brüche erhält man auf diese Weise?

17. Wieviel Wochen sind 3 Tage, 4 Tage, 7 Tage, 13 Tage, 14 Tage, 17 Tage, 21 Tage? Man nehme als gemeinschaftliches Maß a) 1 Tag, b) 12 Stunden, c) 8 Stunden und d) 6 Stunden.

18. Wieviel Zehner sind 200 Einheiten; 225 Einheiten; 25 Einheiten; 5 Einheiten? Man nehme als gemeinschaftliches Maß a) 1 Einheit, b) 5 Einheiten.

19. Wieviel Viertelstunden sind a) 3 Minuten, b) 9 Minuten,

c) 3+9 Minuten, d) 12+3 Minuten, e) 3+9+12+3 Minuten, Gemeinschaftliche Maße sind u. a. 1° 1 Minute, 2° 90 Secunden, 3° 3 Minuten.

20. Wieviel Franken sind a) 12 Sous, b) 8 Sous, c) 12—8 Sous, d) 6 Sous, e) 12—6 Sous? Gemeinschaftliche Maße sind u. a. 1° 1 Sous, 2° 2 Sous, 3° bei einigen dieser Summen auch noch 3 und 4 und 6 Sous.

21. Wieviel Thaler sind a) 6 Silbergroschen, b) 6×2 Sgr., c) 6×3 Sgr., d) 6×4 Sgr., e) 6×5 Sgr.? Gemeinschaftliche Maße sind u. a. 1° 1 Sgr., 2° 1 Sgr. 6 Pf., 3° 2 Sgr., 4° 3 Sgr., 5° 6 Sgr.

22. Wieviel rheinische Gulden machen a) 54 Kreuzer, b) die Hälfte von 54 Kr., c) der dritte Theil von 54 Kr., d) der sechste Theil von 54 Kr., e) der neunte Theil von 54 Kr.? Man nehme als gemeinschaftliche Maße 1° 1 Kreuzer, 2° 2 Kr., 3° 3 Kr., 4° 6 Kr. (S. Seite 58.)

23. Man bezeichne durch Brüche a) 2,5 Kilogr., b) 3,25 Kilogr., c) 17,205 Kilogr., d) 0,0015 Kilogr., indem man bei a) 1 u. 5 Hektogr. bei b) 1 und 5 Dekagr., bei c) 1 und 5 Gramm, bei d) 1 und 5 Decigramm als gemeinschaftliches Maß der Einheit (Kilogramm) und jener Größe annimmt.

24. Man bezeichne durch Brüche, wieviel Hektoliter 2,3 Hektoliter macht, indem man als gemeinschaftliche Maße a) den Dekaliter, b) den Liter, c) den Deciliter, d) den Centiliter nimmt.

25. (89) Ein Thaler = $^7/_4$ rhein. Gulden = $^3/_2$ öster. Florin = $^3/_4$ Fünffrankenstück; wieviel Thaler macht also 1 Gulden, 1 Florin, 1 Fünffrankenstück?

26. Ein Silbergroschen = $^1/_{30}$ Thaler; 1 Pfennig = $^1/_{360}$ Thaler; 1 Sous = $^1/_{75}$ Thaler; wieviel Silbergroschen, Pfennige oder Sous macht 1 Thaler?

27. Der Preis einer Elle = $^2/_5$ Franken; welchen Theil vom Preise einer Elle macht 1 Franken?

28. Ein Pfund kostet $^2/_3$ Thaler; wieviel Pfund erhält man für 1 Thaler?

29. Eine Größe = $^5/_7$ Einheit; wieviel Größen macht 1 Einheit oder wie oft ist $^5/_7$ in 1 Einheit enthalten?

30. Wie oft ist $^4/_3$ in 1 enthalten?

31. Eine Einheit = $^4/_5$ Größe; wieviel Einheiten macht 1 Größe, oder wieviel mal $^4/_5$ Größe macht 1 Größe?

32. Wieviel mal $^7/_8$ gibt 1?

33. (90) Auszusprechen $^8/_{17}$, $^4/_{10}$, $^2/_7$, $^{341}/_{475}$, $^5/_{11}$.

34. Anzuschreiben: drei Sechszehntel; sieben Fünfzigstel; achthundert Dreiundzwanzigstel; ein und sechzig Neunzigstel.

35. Als gewöhnliche Brüche und Dezimalzahlen anzuschreiben: 3 Zehntel; 215 Hunderttel; 3050 Tausendtel; 26 Zehntausendtel; 3057 Hunderttausendtel; 35 Millionstel; 30 Zehntel; 300 Hunderttel; 3000 Tausendtel; 30000 Zehntausendtel; 300000 Hunderttausendtel; 3000000 Millionstel.

36. (91) Wieviel Centimes macht $^1/_2$ Franken; $^2/_4$ Fr.; $^4/_8$ Fr.; $^5/_{10}$ Fr.; $^3/_4$ Fr.; $^6/_8$ Fr.; $^{12}/_{16}$ Fr.?

37. Wieviel Silbergroschen macht $^2/_3$ Thlr.; $^4/_6$ Thlr.; $^6/_9$ Thlr.; $^8/_{12}$ Thlr.; $^{10}/_{15}$ Thlr.; $^{12}/_{18}$ Thlr.?

38. Wieviel Kreuzer macht $^7/_{12}$ rhein. Gulden; $^3/_{12}$ Gulden; $^7/_{12}+^3/_{12}$ Gulden; $^{10}/_{12}$ Gulden; $^7/_{12}-^3/_{12}$ Gulden; $^4/_{12}$ Gulden; $^{12}/_{12}$ Gulden; $^{24}/_{12}$ Gulden. (S. Seite 58.)

39. Wieviel Kreuzer macht $^4/_5+^2/_5$ Gulden? wieviel Gulden macht diese Summe Kreuzer? wieviel Kreuzer macht $^4/_5-^2/_5$ Gulden? wieviel Gulden macht diese Summe Kreuzer?

40. 1 Fuß = 12 Zoll. Ein Zoll = 12 Linien. Wieviel Zoll macht $^2/_3+^3/_4$ Fuß; wieviel Fuß macht diese Länge? wieviel Linien macht $^7/_{15}-^3/_{15}$ Fuß? wieviel Fuß macht diese Länge?

41. Wieviel Silbergroschen macht $^3/_4$ Thlr.; $^3/_4$ Thlr. $\times$ 2; $^3/_4$ Thlr. $\times$ 3; $^3/_4$ Thlr $\times$ 4? Man verwandele diese Summen in Thaler, mit Hilfe des gemeinschaftlichen Maßes von 7 Silbergroschen 6 Pfennig.

42. Wieviel Centimes macht $^3/_5$ Fr.; $^3/_5$ Fr. : 2; $^3/_{15}$ Fr. : 3; $^3/_5$ Fr. : 4; $^3/_5$ Fr. : 5; $^3/_5$ Fr. : 6? Man verwandele diese Centimes wieder in Franken?

43. Wieviel Minuten macht $^1/_2$ Stunde: 3; $^1/_6$ Stunde; $^2/_3$ Stunde : 4; $^2/_{12}$ Stunde; $^3/_5$ Stunde : 4; $^3/_{20}$ Stunde; $^1/_6$ Stunde; 5; $^1/_{30}$ Stunde?

44. Wieviel Neukreuzer macht $^{15}/_{25}$, $^{17}/_{25}$, $^{18}/_{25}$, $^{19}/_{25}$ öster. Florin? welcher von den Brüchen $^{16}/_{25}$, $^{17}/_{25}$, $^{18}/_{25}$, $^{19}/_{25}$ ist der größte, und welcher der kleinste? (S. Seite 58.)

45. Wieviel Neukreuzer macht $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{10}$ öster. Florin? Welcher von den Brüchen $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{10}$ ist der größte, und welcher der kleinste?

46. Wieviel Neukreuzer macht $^3/_4$, $^3/_5$, $^3/_{10}$ öster. Florin? Welcher von den Brüchen $^3/_4$, $^3/_5$, $^3/_{10}$ ist der größte, und welcher ist der kleinste?

47. Wieviel Centimes macht $^3/_4$ Franken? wieviel Centimes macht $^2/_5$ von $^3/_4$ Franken? wieviel Franken macht dies?

48. Wieviel Minuten macht $^3/_4{}^0$; wieviel Minuten macht $^2/_5$ von $^3/_4{}^0$? wieviel Grad macht dieß? (S. Seite 59.)

49. Wieviel Loth macht $^3/_5$ von $^1/_6$ Pfund, und wieviel $^1/_6$ von $^3/_5$ Pfund? wieviel Pfund macht jedes? (S. Aufgabe 12, Seite 59.)

50. Wieviel Liter macht $^5/_6$ von $^3/_4$ von $^5/_8$ Fuder? wieviel $^3/_4$ von $^5/_8$ von $^5/_6$ Fuder? wieviel $^5/_8$ von $^3/_4$ von $^5/_6$ Fuder? wieviel Fuder macht jedes?

51. (92) Wieviel Zwölftel macht $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_4$?

52. Man verwandele folgende Brüche in andere, deren Zähler durch 6 theilbar sei: $^4/_{15}$, $^3/_7$, $^5/_8$, $^1/_4$.

53. Man verwandele folgende Brüche in andere mit dem Zähler 10. $^2/_7$; $^5/_8$; $^1/_6$.

54. Man verwandele folgende Brüche in andere mit dem Nenner 18. $^1/_2$, $^2/_3$, $^1/_6$, $^4/_9$.

55. (93) Man vereinfache folgende Brüche: $^3/_6$, $^4/_{12}$, $^6/_9$, $^{15}/_{25}$, $^6/_8$, $^7/_{14}$, $^{12}/_{16}$, $^{15}/_{20}$, $^{12}/_{18}$, $^{20}/_{24}$.

56. Warum waren die sechs Resultate der Aufgabe 36 und die der Aufgabe 37 je drei und drei einander gleich?

57. Der directe Abstand (die Entfernung in gerader Linie) zwischen Quelle und Mündung, und die Stromentwickelung (Länge mit den Krümmungen) der bedeutendsten Ströme Amerikas beträgt:

1) Mackenzie, dir. Abstand 225 Meilen, Stroment. 450 Meilen.
2) St. Lorenz, d. A. 250 M., Stroment. 460 M.
3) Missisippi, d. A. 320 M., Stroment. 730 M.
4) Maranhon, d. A. 430 M., Stroment. 730 M.
5) La Plata, d. A. 260 M., Stroment. 470 M.

Welches ist bei einem jeden das Verhältniß zwischen der Stromentwickelung und dem directen Abstand zwischen Quelle und Mündung, d. h. durch welchen Bruch wird die Stromentwickelung bezeichnet, wenn man den directen Abstand als Einheit annimmt?

58. Dieselbe Aufgabe für folgende europäische Flüsse:

Wolga,	dir. Abstand	210 M.,	Stromentwickelung	430	Meilen.
Dwina,	—	70 M.,	—	160	—
Elbe,	—	80 M.,	—	155	—
Rhein,	—	90 M.,	—	150	—
Donau,	—	220 M.,	—	365	—
Dnjepr,	—	140 M.,	—	240	—
Don,	—	105 M.,	—	195	—

59. (94) Man bringe folgende Brüche unter einerlei Benennung, $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$. — $^{3}/_{4}$, $^{4}/_{5}$. — $^{5}/_{6}$, $^{7}/_{11}$. — $^{7}/_{9}$, $^{5}/_{8}$.

60. Man bringe ebenfalls unter einerlei Benennung $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{5}$. — $^{1}/_{7}$, $^{3}/_{4}$, $^{5}/_{9}$. — $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{7}$, $^{3}/_{4}$, $^{4}/_{5}$.

61. Man bringe unter einerlei Benennung $^{5}/_{6}$, $^{2}/_{3}$. — $^{5}/_{8}$, $^{3}/_{4}$. — $^{3}/_{5}$, $^{2}/_{10}$. — $^{3}/_{4}$, $^{5}/_{12}$. — $^{1}/_{6}$, $^{4}/_{9}$. — $^{3}/_{10}$, $^{7}/_{15}$.

62. Man bringe unter einerlei Benennung $^{1}/_{2}$. $^{3}/_{4}$, $^{5}/_{8}$. — $^{2}/_{3}$, $^{5}/_{6}$, $^{11}/_{12}$. — $^{5}/_{6}$, $^{2}/_{9}$, $^{7}/_{12}$. — $^{3}/_{10}$, $^{4}/_{25}$, $^{3}/_{4}$.

63. Man bringe unter einerlei Benennung $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{6}/_{8}$. — $^{2}/_{3}$, $^{5}/_{6}$, $^{8}/_{12}$. — $^{5}/_{6}$, $^{6}/_{9}$, $^{7}/_{12}$. — $^{5}/_{10}$, $^{15}/_{25}$, $^{3}/_{4}$.

64. Man beweise, daß von mehreren Brüchen von einerlei Benennung derjenige, welcher den größten Zähler hat, der größte ist.

65. Man ordne die Brüche einer jeden der drei Aufgaben 60 nach ihrer Größe, nachdem man sie unter einerlei Benennung gebracht hat.

66. Man beweise, daß von mehreren Brüchen, die denselben Zähler haben, derjenige, welcher den kleinsten Nenner hat, der größte ist.

67. Man verändere die Brüche jeder der drei Aufgaben 60 so daß sie gleiche Zähler bekommen, und ordne sie dann nach ihrer Größe.

68. (95, 96) Wieviel Unzen macht $1^{1}/_{2}$ Pfund; $^{3}/_{2}$ Pfd.; $2^{3}/_{4}$ Pfd.; $^{1}/_{4}$ Pfd.; $3^{5}/_{8}$ Pfd; $^{29}/_{8}$ Pfd.; $4^{9}/_{16}$ Pfd.; $^{73}/_{16}$ Pfd.? (S. Nr. 83.)

69. Welche von folgenden Brüchen sind ächte, welche unächte Brüche? Die unächten verwandele man in gemischte Zahlen. $^{2}/_{3}$, $^{5}/_{3}$, $^{7}/_{4}$, $^{5}/_{8}$, $^{6}/_{9}$, $^{13}/_{10}$, $^{100}/_{19}$, $^{200}/_{35}$, $^{99}/_{20}$, $^{297}/_{60}$, $^{5}/_{21}$, $^{15}/_{7}$, $^{14}/_{7}$, $^{25}/_{8}$, $^{24}/_{3}$, $^{3250}/_{125}$, $^{3250}/_{125}$, $^{125}/_{125}$, $^{7}/_{7}$.

70. Man verwandele in unächte Brüche $1^{3}/_{4}$, $2^{3}/_{5}$, $3^{4}/_{7}$, $6^{7}/_{10}$, $101^{3}/_{100}$, $212^{17}/_{150}$.

71. Wieviel Drittel macht 1; wieviel Siebentel macht 3; wieviel Zehntel macht 15; wieviel Zwölftel macht 4; wieviel Dreißigstel macht 30; wieviel Zweiundfünfzigstel macht 17?

72. Wieviel Pfennig sind in 12 Thaler $6^1/_4$ Silbergroschen; wieviel Minuten in 3 Tagen 4 Stunden $5^1/_3$ Minute; wieviel Linien in 3 Fuß 2 Zoll $5^1/_2$ Linie?

73. Wieviel Tage, Stunden und Minuten macht $^{24785}/_4$ Minute; wieviel Thaler, Silbergroschen, Pfennige, macht $^{3524}/_7$ Pfennige; wieviel Fuß, Zoll und Linien macht $^{617}/_8$ Linie?

74. Man vergleiche die Bevölkerung der verschiedenen deutschen Großherzogthümer und Herzogthümer mit der des Großherzogthums Luxemburg; d. h. durch welche Zahl wird die Bevölkerung eines jeden dieser Länder ausgedrückt, wenn man die Bevölkerung des Großherzogthums Luxemburg als Einheit annimmt?

75. Man vergleiche die Bevölkerung der deutschen Länder Oesterreichs mit der der deutschen Länder Preußens; die des außerdeutschen Oesterreichs mit der des außerdeutschen Preußens; die von Gesammtösterreich mit der von Gesammtpreußen.

76. Man vergleiche die Bevölkerung der verschiedenen deutschen Königreiche mit der Bevölkerung Bayerns.

77. Ungefähr $^2/_5$ der Einwohner des preußischen Staates, und ungefähr $^4/_5$ der Einwohner des österreichischen Staates sind katholisch. Wieviel Katholiken sind in diesen Ländern?

78. Man vergleiche die Größe der verschiedenen Welttheile mit der Größe von Europa. (S. Seite 48.)

Addition der Brüche.

97. Addition von **Brüchen mit gleicher Benennung.** Beispiel. $^7/_{12} + ^{15}/_{12} + ^{16}/_{12} + ^{30}/_{12} + ^{38}/_{12} =$ 7 Zwölftel + 15 Zwölftel + 16 Zwölftel + 30 Zwölftel + 38 Zwölftel = 106 Zwölftel $= ^{106}/_{12} = 8^{10}/_{12} = 8^5/_6$. Haben also alle zu addirenden Brüche gleiche Benennung, so addirt man bloß die Zähler und läßt den gemeinschaftlichen Nenner unverändert. Findet man auf diese Weise einen unächten Bruch, so verwandelt man ihn ge-

wöhnlich in eine gemischte Zahl und vereinfacht den Bruch, wenn dieß möglich ist.

98. Hat man **Brüche von ungleichen Nennern** zu addiren, so bringt man sie zuerst unter gleiche Benennung (94) und verfährt dann, wie im vorigen Falle. Beispiel. $\frac{7}{12}+\frac{20}{16}+\frac{4}{3}+\frac{5}{2}+\frac{19}{6}=\frac{7}{12}+\frac{5}{4}+\frac{4}{3}+\frac{5}{2}+\frac{19}{6}=\frac{7}{12}+\frac{15}{12}+\frac{16}{12}+\frac{30}{12}+\frac{38}{12}=8\frac{5}{6}$.

99. Hat man **gemischte Zahlen** zu addiren, so addirt man zuerst die Brüche, verwandelt diese Summe, wenn sie ein unächter Bruch ist, in eine gemischte Zahl und behält die Ganzen dieser gemischten Zahl, um sie zu den andern Ganzen zu addiren. Beispiel. $\frac{7}{12}+1\frac{4}{16}+1\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{6}=\frac{7}{12}+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{6}$. $\frac{7}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{7}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{6}{12}+\frac{2}{12}=\frac{22}{12}=\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}$ Ich schreibe die $\frac{5}{6}$ an und addire 1 zu $1+1+2+3$, und finde, daß obige Summe $=8\frac{5}{6}$. (Vergl. 46.)

Subtraction der Brüche.

100. Subtraction eines **Bruches von einem andern mit gleicher Benennung.** Beispiel. $\frac{13}{15}-\frac{7}{15}$. 13 Fünfzehntel — 7 Fünfzehntel = 6 Fünfzehntel = $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$. Haben also Subtrahend und Minuend gleiche Benennung, so zieht man den Zähler des ersten vom Zähler des zweiten ab und läßt den gemeinschaftlichen Nenner unverändert.

101. Haben **Subtrahend und Minuend nicht gleiche Nenner,** so bringt man sie zuerst unter gleiche Benennung und verfährt dann wie in obigem Falle. Beispiel. $\frac{5}{7}-\frac{3}{5}=\frac{25}{35}-\frac{21}{35}=\frac{4}{35}$.

102. Hat man eine **gemischte Zahl von einer gemischten Zahl** abzuziehen, so zieht man zuerst den Bruch des Subtrahends von dem des Minuends und dann die Ganzen des Subtrahends von denen des Minuends ab. Ist der Bruch des Subtrahends größer als der des Minuends, so wendet man die schon bekannte Methode an, um diese Subtraction möglich zu machen.

Beispiel. $15\frac{5}{6}-10\frac{2}{5}$. $\frac{2}{5}$ von $\frac{5}{6}$ bleibt $\frac{13}{30}$; 10 von 15 bleibt 5. Also $15\frac{5}{6}-10\frac{2}{5}=5\frac{13}{30}$.

Anderes Beispiel. $5\frac{1}{4}-2\frac{2}{3}=5\frac{3}{12}-2\frac{8}{12}$. Da man 8 Zwölftel nicht von 3 Zwölftel abziehen kann, so fügt man in Gedanken 1 Ganzes = 12 Zwölftel zum Bruche des Minuends, und behält dieses Ganze, um es hernach mit dem andern Ganzen vom Minuend abzuziehen. 8 Zwölftel von $12+3=15$ Zwölftel, bleibt $\frac{7}{12}$; und 2 Ganze und das behaltene Ganze = 3 Ganze von 5 Ganzen, bleibt 2 Ganze. Also $5\frac{1}{4}-2\frac{2}{3}=2\frac{7}{12}$. Ebenso fände man $10\frac{1}{12}-\frac{3}{4}=10\frac{1}{12}-\frac{9}{12}=9\frac{4}{12}=9\frac{1}{3}$.

Aufgaben.

1. Wieviel macht $\frac{3}{20}+\frac{7}{20}+\frac{13}{20}+\frac{5}{20}+\frac{20}{20}$ Franken?

2. Wieviel macht $1\frac{5}{6}+3\frac{1}{6}+10\frac{4}{6}+20\frac{3}{6}$ Thaler?

3. Wieviel macht $\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{2}{3}$?

4. Wieviel macht die Summe der Zahlen der verschiedenen Aufgaben 59, 60, 61, 62, 63. Seite 109?

5. Welche Zahl ist um $3\frac{4}{5}$ größer als die Summe von $2\frac{1}{4}+3\frac{7}{10}+5\frac{1}{2}$?

6. **A** hat $5\frac{1}{6}$ Gulden weniger als **B**, der $10\frac{6}{12}$ Gulden weniger hat, als **C**. **C** hat soviel als **A** und **B**; wieviel hat Jeder?

7. Wieviel macht $\frac{17}{19}-\frac{5}{19}$; $\frac{8}{15}-\frac{4}{15}$; $2\frac{6}{7}-1\frac{5}{7}$; $100\frac{7}{8}-80\frac{3}{8}$; $200\frac{1}{4}-100\frac{3}{4}$; $60\frac{7}{16}-59\frac{16}{18}$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}-\frac{4}{5}$; $1-\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{3}-1$; $1\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}$; $1\frac{3}{5}-1\frac{1}{2}$; $1\frac{2}{3}-1\frac{3}{5}$?

8. Wieviel macht $\frac{11}{12}-\frac{5}{6}$; $\frac{4}{15}-\frac{7}{30}$; $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$; $\frac{5}{9}-\frac{2}{12}$; $\frac{3}{10}-\frac{2}{15}$; $5\frac{7}{8}-1\frac{5}{12}$; $60\frac{3}{14}-55\frac{7}{35}$?

9. Wieviel macht $7\frac{1}{4}-6\frac{3}{4}$; $5\frac{2}{3}-3\frac{11}{12}$; $8\frac{1}{13}-5\frac{9}{26}$; $7\frac{1}{6}-5\frac{11}{21}$; $8\frac{5}{12}-7\frac{13}{16}$; $15\frac{7}{20}-9\frac{23}{30}$; $20\frac{2}{5}-10\frac{3}{15}$; $8\frac{9}{27}-\frac{2}{3}$; $5\frac{3}{7}-\frac{9}{21}$?

10. Drei Personen arbeiten zwei Tage an einer Arbeit, welche die erste in 20, die zweite in 16, die dritte in 12 Tagen allein vollenden könnte. Welchen Theil der Arbeit haben sie gemacht?

11. Statt $\frac{8}{15}$ hat man $\frac{1}{2}$ genommen; welchen Irrthum hat man begangen?

12. Zu beweisen a) daß ein ächter Bruch vermehrt wird, wenn man dieselbe Zahl zum Zähler und Nenner addirt, b) daß ein Bruch, welcher der Einheit gleich ist, dadurch seinen Werth nicht verändert, und c) daß ein Bruch, der größer als 1 ist, dadurch an Werth verliert. Man beweist es, indem man a) diese Brüche von der Einheit und c) die Einheit von diesen Brüchen abzieht.

Multiplication der Brüche.

103. Multiplication **eines Bruches durch eine ganze Zahl.** Beispiel. $\frac{13}{17}\times 12$. $\frac{13}{17}\times 12 = 12$ Größen von $\frac{13}{17}$ Einheiten $= \frac{13}{17}+\frac{13}{17}+\frac{13}{17}+\frac{13}{17}+\frac{13}{17}+\frac{13}{17}+\frac{13}{17}+\frac{13}{17}+\frac{13}{17}+\frac{13}{17}+\frac{13}{17}+\frac{13}{17} =$

$$\frac{13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13}{17} = \frac{13\times 12}{7} = \frac{156}{17}$$

$= 9\frac{3}{17}$. Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliziren, multiplizirt man also den Zähler durch diese Zahl und läßt den Nenner unverändert. (Vergl. 65.)

Ist, wie in folgendem Beispiele, $\frac{13}{36}\times 12$, der Nenner des Bruches durch die ganze Zahl, mit welcher man den Bruch multipliziren soll, theilbar, so läßt sich das Product $\frac{13\times 12}{36}$ vereinfachen, indem man dessen Zähler und Nenner durch 12 dividirt, wodurch man zum Zähler den ersten

Zähler wieder erhält, und zum Nenner den zwölften Theil des ersten Nenners.

$$\frac{13}{36}\times12=\frac{13\times12}{36}=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$$

Zu obiger Regel können wir also hinzufügen: Statt den Zähler durch die ganze Zahl zu multipliziren, kann man auch den Nenner durch dieselbe dividiren, wenn diese Division aufgeht.

104. Multiplication **einer ganzen Zahl durch einen Bruch.** Beispiel. $12\times{}^{13}/_{17}$.

Wir haben hier folgende Aufgabe zu lösen: Eine Größe enthält 12 Einheiten; wieviel macht $^{13}/_{17}$ solcher Größe?

1 Größe = 12 Einh. = $\frac{17\times12}{17}$ = 17×12 Siebzehntel.

1 Siebzehntel Größe = $17\times12:17=12$ Siebzehntel (89).

13 Siebzehntel Größe = 12×13 Siebzehntel, oder

$$^{13}/_{17} \text{ Größe} = \frac{12\times13}{17}.$$

Um eine ganze Zahl durch einen Bruch zu multipliziren, multiplizirt man also den Bruch durch die ganze Zahl, wie in vorigem Falle. (Vergl. 66.)

105. Multiplication **eines Bruches durch einen Bruch.** Beispiel. $^{4}/_{15}\times{}^{2}/_{3}$.

Wir haben hier folgende Aufgabe zu lösen: Eine Größe macht $^{4}/_{15}$ Einheit; wieviel macht $^{2}/_{3}$ solcher Größe?

1 Größe = $\frac{4}{15}$ Einh. $=\frac{4\times3}{15\times3}=4\times3$ Fünfundvierzigstel der Einheit.

1 Drittel der Größe macht $4\times3:3=4$ Fünfundvierzigstel der Einheit.

2 Drittel Größe macht 4×2 Fünfundvierzigstel der Einheit, oder

$\frac{2}{3}$ Größe $=\frac{4\times2}{15\times3}$ oder $\frac{8}{45}$.

Um also einen Bruch durch einen Bruch zu multipliziren, multiplizirt man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. (Vergl. 67.)

106. Diese Regel enthält die beiden vorigen, denn nach dieser Regel macht $^{13}/_{17} \times 12$ oder $^{13}/_{17} \times {}^{12}/_{1}$ (96. Anm.). $\frac{13 \times 12}{17 \times 1}$ oder $\frac{13 \times 12}{17}$; und $12 \times {}^{13}/_{17}$ oder $^{12}/_{1} \times {}^{13}/_{17}$ macht nach derselben $\frac{12 \times 13}{1 \times 17}$ oder $\frac{12 \times 13}{17}$. (Vergl. 68.)

107. $\frac{4}{15} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{15 \times 3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 15}$(Nr. 36) $= \frac{2}{3} \times \frac{4}{15}$. Man kann also bei Brüchen, wie bei ganzen Zahlen und Dezimalen, Multiplicand und Multiplicator mit einander verwechseln. Dieser Grundsatz gilt ebenfalls für gemischte Zahlen, da sich ja jede gemischte Zahl in einen Bruch verwandeln läßt. Beispiel. $1^3/_4 \times 3^2/_3 = {}^7/_4 \times {}^{11}/_3 = {}^{11}/_3 \times {}^7/_4 = 3^2/_3 \times 1^3/_4$.

108. Hat man **gemischte Zahlen** mit einander zu multipliziren, so verwandelt man dieselben in unächte Brüche.

Beispiel. $5 \times 2^1/_3 = 5 \times {}^7/_3 = {}^{35}/_3 = 11^2/_3$.

$3^3/_4 \times 8 = {}^{15}/_4 \times 8 = \frac{15 \times 8}{4} = 15 \times 2 = 30$:

$3^2/_3 \times 1^3/_4 = {}^{11}/_3 \times {}^7/_4 = {}^{77}/_{12} = 6^5/_{12}$.

Meistens kann man aber einfacher verfahren in folgender Weise:

$2^1/_3$ Größe von 5 Einheiten $= {}^1/_3$ Größe von 5 Einh. $+$ 2 Größen von 5 Einheiten $= 5 \times {}^1/_3$ oder $^5/_3$ oder $1^2/_3$, und 10, macht $11^2/_3$.

$3^3/_4 \times 8 = 8 \times 3^3/_4 = 8 \times {}^3/_4$ oder $^{24}/_4$ oder 6, und 8×3 oder 24, macht 30.

$3^2/_3 \times 1^3/_4 = 3^2/_3 \times {}^3/_4 + 3^2/_3 \times 1 = {}^2/_3 \times {}^3/_4 + 3 \times {}^3/_4 + 3^2/_3$

$=\frac{6}{12}+\frac{9}{4}+3\frac{2}{3}=\frac{6}{12}+\frac{27}{12}+3\frac{8}{12}=3\frac{41}{12}=3+3\frac{5}{12}=6\frac{5}{12}$.

Anmerkung. Da $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$ die Hälfte von $\frac{3}{4}$ bezeichnet, so heißt ein Product von zwei Brüchen auch wohl ein Bruch von einem Bruche; und da $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}$ die $\frac{2}{5}$ von $\frac{1}{2}$ von $\frac{3}{4}$ bezeichnet, so heißt ein Product mehrerer Brüche auch wohl ein Bruch von Brüchen. Für das Product von drei oder mehr Brüchen gilt ebenfalls die Regel, daß man die Zähler und Nenner mit einander zu multiplizieren hat, denn $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times1}{4\times2}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times1\times2}{4\times2\times5}$.

Aufgaben.

1. (103) Wieviel machen 3 Größen von $\frac{3}{4}$ Einheiten; 7 Größen von $\frac{5}{6}$ Einheiten; 9 Größen von $\frac{3}{5}$ Einheiten?

2. Eine Luxemburger Elle = $\frac{3}{5}$ Meter; wieviel Meter macht 1 Stab = 2 Ellen; wieviel Meter macht 12 Ellen, 17 Ellen?

3. Wieviel macht $\frac{2}{7}\times18$; $\frac{3}{10}\times7$; $\frac{6}{7}\times9$?

4. Wieviel macht $\frac{3}{4}\times2$; $\frac{9}{10}\times5$; $\frac{7}{12}\times3$; $\frac{17}{20}\times10$; $\frac{31}{300}\times120$ $\frac{1}{150}\times50$?

5. Wieviel macht $\frac{5}{16}\times2\times3$; $\frac{3}{18}\times2\times9$; $\frac{4}{25}\times5\times5\times10$?

6. Wieviel Franken kosten 3 Stücke Tuch, jedes von 95 Meter, wenn 1 Meter $\frac{4}{5}$ Franken kostet?

7. Wieviel Sous kosten 4 Bretter, jedes von 5 Fuß, wenn 1 Fuß $2\frac{1}{2}$ Silbergroschen kostet? 1 Silbergroschen = $\frac{5}{2}$ Sous.

8. Wieviel macht $\frac{3}{4}\times3$; $\frac{3}{4}\times5$; $\frac{3}{4}\times(3+5)$; $\frac{7}{12}\times5$; $\frac{7}{12}\times7$; $\frac{7}{12}\times(5+7)$; $\frac{7}{12}\times(7-5)$; $\frac{5}{6}\times8$; $\frac{3}{7}\times7$?

9. Wieviel macht das Vierfache von $\frac{6}{11}$; das Siebenfache von $\frac{6}{7}$?

10. (104) Wieviel macht $\frac{3}{4}$ Größe von 5 Einheiten; $\frac{2}{13}$ Größe von 7 Einheiten; $\frac{4}{11}$ Größe von 100 Einheiten; $\frac{2}{115}$ Größe von 623 Einheiten?

11. Wieviel macht $\frac{3}{4}$ von 8; $\frac{8}{11}$ von 99; $\frac{17}{18}$ von 180; $\frac{3}{10}$ von 70; $\frac{4}{15}$ von 15; $\frac{16}{21}$ von 21; $\frac{113}{7}$ von 7? (Vergl. Aufg. 36 S. 107.)

12. (105) Wieviel macht die Hälfte eines Viertels; das Drittel eines Fünftels; das Sechstel eines Drittels; das Drittel eines Sechstels; der 24ste Theil eines Hunderttels?

13. Wieviel macht die Hälfte von $\frac{3}{4}$; das Drittel von $\frac{4}{5}$; das Sechstel von $\frac{2}{3}$; der 24ste Theil von $\frac{17}{100}$?

14. Wieviel macht $\frac{3}{2}$ Größe von $\frac{3}{4}$ Einh.; $\frac{2}{3}$ Größe von $\frac{4}{5}$ Einh.; $\frac{5}{6}$ Größe von $\frac{2}{3}$ Einh.; $\frac{7}{24}$ Größe von $\frac{17}{100}$ Einh.; $\frac{3}{4}$ Größe von $\frac{3}{2}$ Einh.; $\frac{4}{5}$ Größe von $\frac{2}{3}$ Einh.; $\frac{2}{3}$ Größe von $\frac{5}{6}$ Einh.; $\frac{17}{100}$ Größe von 24 Einheiten?

15. Wieviel macht $\frac{2}{7}\times\frac{7}{5}$; $\frac{3}{4}\times\frac{12}{17}$; $\frac{5}{9}\times\frac{18}{25}$; $\frac{3}{11}\times\frac{22}{27}$; $\frac{3}{10}\times\frac{10}{3}$; $\frac{10}{3}\times\frac{3}{10}$?

16. Wieviel macht $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von 8; $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{7}$ von 14; $\frac{1}{2}$ von $\frac{3}{4}$ von 24; $\frac{1}{2}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{8}{21}$?

17. 1 Thaler = $\frac{3}{4}$ Fünffrankenstück; 1 Fünffrankenstück = $\frac{50}{53}$ amerikan. Dollar (in Silber); 1 amerikan. Dollar = $\frac{106}{105}$ engl. Dollar. Ein engl. Dollar = 6 Shillinge. Wieviel Shilling macht 1 Thaler?

18. Ein guter Groschen = $\frac{5}{4}$ Silbergroschen. Ein Silbergroschen = 12 Pfennig. Wieviel Pfennig hat ein guter Groschen?

19. Wenn das Malter Waizen $25\frac{1}{2}$ Franken kostet, was kosten $3\frac{2}{3}$ Malter?

20. Eine Elle kostet $2\frac{3}{5}$ Thaler; was kosten $7\frac{3}{4}$ Ellen?

21. Man multiplizire 20 durch $10\frac{1}{5}$; $10\frac{1}{5}$ durch 20; $3\frac{5}{9}$ durch $2\frac{2}{7}$; $2\frac{2}{7}$ durch $3\frac{5}{9}$.

22. Um dem Boden die Fruchtbarkeit zu ersetzen, welche eine Getreideernte ihm entzieht, bedarf es einer Quantität Dünger, welche $2\frac{1}{3}$ mal das Doppelte des Gesammtgewichtes der ganzen Erndte an Getreide und Stroh beträgt. Wieviel Dünger ist demnach erfordert, um die Fruchtbarkeit zu ersetzen, welche eine Ernte von $15\frac{3}{5}$ Hektoliter Waizen dem Boden geraubt hat. 1 Hektoliter Waizen wiegt 76 Kilogramm, und das Stroh von 1 Hektoliter 167 Kilogramm.

23. Wieviel macht $215\times\frac{10}{2}$; $31568\times\frac{10}{2}$? $\frac{10}{2} = 5$. Wie kann man also einfacher als nach der gewöhnlichen Weise durch 5 multipliziren?

24. $\frac{100}{4}=25$. Wie kann man also einfacher als nach der gewöhnlichen Weise durch 25 multipliziren?

25. Eine ganze Zahl multiplizirt man durch 125, indem man drei Nullen zu derselben hinzufügt, und dann diese neue Zahl durch 8 dividirt. Zu beweisen.

26 $2 = {}^{10}/_{5}$. $4 = {}^{100}/_{25}$. Wie kann man die Multiplication durch 2 oder 4 in eine Division durch 5 oder 25 verwandeln?

27. Zu beweisen, daß man, um Brüche durcheinander zu multiplizieren, auch den Zähler des einen durch den Nenner des andern und den Nenner des einen durch den Zähler des andern dividiren kann, wenn diese Divisionen aufgehen.

28. Zu beweisen, daß die Lehrsätze der Nummern 51, 52, 53, 54 sich auch auf die Brüche ausdehnen lassen.

Division der Brüche.

109. Wegen des Lehrsatzes von Nr. 107 ist es bei der Division der Brüche, wie bei der der ganzen Zahlen und Dezimalen, einerlei, ob der bekannte Factor (Divisor) der Multiplicand oder Multiplicator des Productes (Dividendes) ist, d. h. der Quotient zweier Brüche (z. B. $^8/_{45} : {}^4/_{15}$) ist derselbe, mag er das Resultat einer Division der ersten oder der zweiten Art sein. (Man wende auf den angegebenen Fall die Beweisführung von Nr. 36 an.)

110. Division **eines Bruches durch einen Bruch.** Beispiel. Wenn $^4/_{15}$ Thaler einen Franken macht, so macht $^2/_3$ Thaler in Franken $^2/_3 : {}^4/_{15}$.[1]) Wenn aber $^4/_{15}$ Thaler einen Franken macht, so macht 1 Thaler $^{15}/_4$ Franken (89), und folglich $\frac{2}{3}$ Thaler $\frac{15}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{15}{4} = \frac{2 \times 15}{3 \times 4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$. Oder allgemeiner: Wenn $^4/_{15}$ Größe eine Einheit macht, so macht $^2/_3$ Größe $^2/_3 : {}^4/_{15}$. Wenn aber $^4/_{15}$ Größe eine

[1]) Geht so klar aus der Begriffsbestimmung der ersten Divisionsart hervor, als folgender Satz: Wenn 30 Thaler ein Pfund feines Silber macht, so machen 240 Thaler in Pfund 240 : 30.

Einheit macht, so macht 1 Größe $^{15}/_{4}$ und folglich $^{2}/_{3}$ Größe $^{15}/_{4} \times {}^{2}/_{3}$. Also $\frac{2}{3} : \frac{4}{15} = \frac{15}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{15}{4} = \frac{2 \times 15}{3 \times 4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$. *Um also einen Bruch durch einen Bruch zu dividiren, multiplizirt man den Dividend mit dem umgekehrten Divisor,* oder, *man kehrt den Divisor um und multiplizirt dann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.*

Anmerkung 1. *Ist der Dividend oder Divisor eine gemischte Zahl, so verwandelt man diese in einen unächten Bruch.*

Beispiel. $2\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{3 \times 2} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

$\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2} = \frac{3}{4} : \frac{5}{2} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{3}{10}$.

$2\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{7}{4} = \frac{5 \times 4}{2 \times 7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$.

Anmerkung 2. Daß $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5}$ kann man auch auf folgende Art beweisen: $\frac{3 \times 7}{4 \times 5} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 7 \times 5}{4 \times 5 \times 7} = \frac{3}{4}$. Also ist $\frac{3 \times 7}{4 \times 5}$ derjenige Factor, welcher mit dem Factor $\frac{5}{7}$ multiplizirt, zum Producte $\frac{3}{4}$ gibt. Wenn also $\frac{3}{4}$ Dividend, $\frac{5}{7}$ Divisor ist, so ist der Quotient $\frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{21}{20}$. (Vergl. 34.)

111. Obiger Beweis läßt sich leicht auf die Fälle anwenden, wo der Dividend oder Divisor, oder beide ganze Zahlen sind. Wir können aber auch die gefundene Regel unmittelbar auf ganze Zahlen ausdehnen.

$15 : \frac{2}{3} = \frac{15}{1} : \frac{2}{3} = \frac{15}{1} \times \frac{3}{2} = 15 \times \frac{3}{2}$.

Um also **eine ganze Zahl durch einen Bruch** *zu di-*

dividiren, multiplizirt man dieselbe durch den umgekehrten Bruch.

112. $\frac{15}{4} : 2 = \frac{15}{4} : \frac{2}{1} = \frac{15}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4 \times 2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}.$

Um also **einen Bruch durch eine ganze Zahl** zu dividiren, multiplizirt man den Nenner des Bruches durch diese ganze Zahl.

Statt den Nenner zu multipliziren, kann man auch den Zähler durch diese ganze Zahl dividiren. Man beweist dieses in derselben Weise, wie den ähnlichen Grundsatz von Nr. 103.

Beispiel. $\frac{15}{4} : 5 = \frac{15}{4 \times 5} = \frac{15 : 5}{4 \times 5 : 5} = \frac{3}{4}$ [1]).

113. Für beide Divisionsarten ist $25 : 8 = \frac{25}{1} : \frac{8}{1} = \frac{25 \times 1}{1 \times 8} = \frac{25}{8}$. Also jede angezeigte Division kann angesehen werden als ein Bruch, dessen Zähler der Dividend und dessen Nenner der Divisor ist, und jeder Bruch kann angesehen werden als eine angezeigte Division, deren Dividend der Zähler und deren Divisor der Nenner des Bruches ist. Als angezeigte Division der ersten Art bezeichnet der Bruch $^{25}/_{8}$, wie oft 8 in 25 enthalten ist, und dieß stimmt vollkommen überein mit der Begriffsbestimmung des Bruches, nach welcher er ausdrückt, wieviel Einheiten von 8 Maßen in 25 Maßen enthalten sind. Als angezeigte Division der zweiten Art bezeichnet er eben so richtig das Achtel von 25, was damit übereinstimmt, daß $25 \times {}^{1}/_{8} = {}^{25}/_{8}$.

114. Da $25 : 8 = {}^{25}/_{8}$, so lehrt Nr. 96, **wie man die Division ganzer Zahlen, welche einen Rest läßt, vol-**

[1]) Uebrigens folgt dieser Grundsatz aus Nr. 103, und er läßt sich leicht unmittelbar beweisen. Vergl. die Beweisführung von 104.

lendet. $^{25}/_{8}=3^{1}/_{8}$. Man fügt nämlich zur ganzen Zahl des Quotienten einen Bruch, dem man den Rest als Zähler und den Divisor als Nenner gibt. $37:5 = {}^{37}/_{5} = 7^{2}/_{5}$. (Vergl. 73.)

115. Da $^{25}/_{8} = 25 : 8$, so lehrt Nr. 73, **wie man einen Bruch in eine Dezimalzahl verwandelt.** Man dividirt nämlich den Zähler durch den Nenner nach der Regel der Dezimalen.

116. Aus der Numeration der Dezimalen ergibt es sich, **wie man eine Dezimalzahl in einen Bruch verwandelt.** 2,1=21 Zehntel = $^{21}/_{10}$. 2,05=205 Hunderttel = $^{205}/_{100}$. 2,376=2376 Tausendtel = $^{2376}/_{1000}$. 2,345357=2345357 Millionstel = $^{2345357}/_{1000000}$. Man schreibt die Dezimalzahl ohne Dezimalstrich als Zähler und 1 mit so viel Nullen, als sie Dezimalen hatte, als Nenner.

Anmerkung. Wie man **eine periodische Dezimalzahl** in eine angezeigte Division und mithin **in einen Bruch** verwandeln kann, wurde in Nr. 75 gezeigt.

117. So wie 37 : 7 bezeichnet werden kann durch $^{37}/_{7}$, so kann man auch $^{3}/_{4} : {}^{5}/_{7}$ bezeichnen durch $\frac{^{3}/_{4}}{^{5}/_{7}}$; $15 : {}^{2}/_{3}$ durch $\frac{15}{^{2}/_{3}}$; und $^{15}/_{4} : 2$ durch $\frac{^{15}/_{4}}{2}$; und 0.75 : 1,25 durch $\frac{0,75}{1,25}$; und $1,55 : {}^{2}/_{3}$ durch $\frac{1,55}{^{2}/_{3}}$. Nach der Begriffsbestimmung der Brüche bezeichnet $\frac{^{3}/_{4}}{^{5}/_{7}}$ so viel Einheiten als $^{3}/_{4}$ Maße enthalten, deren $^{5}/_{7}$ auf eine Einheit gehen, d. h. $^{3}/_{4} : {}^{5}/_{7}$, und es ließe sich leicht beweisen, daß die Regeln der Brüche ebenso gut, wie deren Definition, sich auf diesen Ausdruck anwenden lassen.

Aufgaben.

1. (110) Wieviel Thaler sind enthalten in $^{2}/_{3}$ rhein. Gulden?
1 Thlr. = $^{4}/_{7}$ rh. Guld.

2. Wieviel holl. Gulden macht $^{3}/_{4}$ Franken?
1 holl. Gulden = $\frac{1250}{2643}$ Franken.

3. Wieviel gewöhnl. französ. Stunden machen a) $\frac{2}{3}$ geograph. Meile b) $\frac{4}{5}$ metrische Stunde c) $\frac{15}{8}$ englische Meilen d) $\frac{1}{4}$ franz. Poststunde? 1 gewöhnl. franz. Stunde = $\frac{3}{5}$ geogr. Meile = $\frac{5}{9}$ metr. Stunde = $\frac{120}{50}$ engl. Meile = $\frac{57}{50}$ franz. Poststunde.

4. $\frac{3}{4}$ einer Größe machen $\frac{5}{6}$ Einheiten; $\frac{2}{3}$ einer Größe machen $\frac{7}{8}$ Einheiten; $2\frac{1}{2}$ Größe machen $\frac{5}{9}$ Einheiten; $\frac{1}{5}$ einer Größe macht $12\frac{1}{2}$ Einheit; $2\frac{3}{5}$ Größe machen $4\frac{5}{8}$ Einheit. Wieviel macht jede dieser Größen?

5. $\frac{3}{4}$ Meter kosten $\frac{7}{8}$ Franken; was kostet ein Meter?

6. Das Dreifache + $\frac{2}{3}$ einer Zahl beträgt $\frac{4}{5}$; welches ist diese Zahl?

7. Wieviel Centimes macht $\frac{3}{4}$ Franken; wie oft ist $\frac{1}{4}$ Franken in 1 Franken; wie oft ist $\frac{3}{4}$ Franken in 1 Franken; wie oft ist $\frac{3}{4}$ Franken in 7 Franken enthalten?

8. (111) Wie oft ist $\frac{1}{3}$ in 1 enthalten; wie oft in 12; wie oft ist $\frac{2}{3}$ in 12 enthalten?

9. Wie oft ist $\frac{1}{5}$ in 1 enthalten; wie oft ist $\frac{3}{5}$ in 1 enthalten; wie oft ist $\frac{3}{9}$ in 9 enthalten?

10. $\frac{1}{7}$ einer Zahl macht 4; $\frac{3}{7}$ einer Zahl macht 1; $\frac{3}{7}$ einer Zahl macht 5. Welches sind diese Zahlen?

11. Was macht $1 : \frac{3}{4}$; $1 : \frac{7}{8}$; $1 : 2\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4} : 1$; $2\frac{1}{5} : 1$?

12. Man dividire durch $\frac{5}{9}$ folgende Zahlen: 1; 5; 8; $1+5+8$; $8-5$; 5×9; 8×9.

13. (112) Wieviel Silbergroschen sind enthalten in 1 Franken; in $\frac{1}{5}$ Franken; in $\frac{3}{5}$ Franken?

14. Womit muß man 7 multipliziren, um 1 zu erhalten; um $\frac{1}{4}$ zu erhalten; um $\frac{5}{4}$ zu erhalten?

15. Welches ist das Achtel von 1, von $\frac{1}{5}$, von $\frac{3}{5}$?

16. Man berechne das Zehntel von folgenden Zahlen $1\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{4}-\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$.

17. (114) Man berechne in Brüchen und Dezimalen den genauen Quotienten folgender Divisionen. 12 : 5; 1755 : 12; 38 : 8; 100 : 3; 200 : 9; 8 : 7.

18. (113) Man verwandele in Dezimalzahlen $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{11}{4}$; $3\frac{1}{3}$; $6\frac{1}{5}-2\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}\times5$; $\frac{3}{8} : 3$.

19. (114) Man verwandele in Brüche 0,1; 0,01: 1,05; 0,0005; 0,55+1,24+0,76; 1,25×2,5; 11,34 : 7,5; 1,5×0,25×3,75.

20. Wieviel macht in Brüchen und Dezimalen 2,5+$^3/_4$; $2^3/_8$−1,25; $3^1/_7$×2,8; 2,35 : $^3/_4$.

21. Man verwandele in Brüche folgende periodische Dezimalzahlen 0,1111 ɔc.; 0,3333 ɔc.; 1,1111 ɔc.; 3,3333 ɔc.; 0,232323 ɔc.; 3,23232 ɔc.; 0,323232 ɔc.; 5,323232 ɔc.; 4 145,145 145 ɔc.

22. Statt eine Zahl durch 5 zu dividiren, kann man sie auch durch $^{10}/_2$ dividiren. Wie läßt sich also die Division durch 5 vereinfachen?

23. 25=$^{100}/_4$. Wie kann man also die Division durch 25 vereinfachen?

24. 125=$^{1000}/_8$. Wie kann man also die Division durch 125 vereinfachen?

25. $^{10}/_5$=2; $^{100}/_{25}$=4; $^{1000}/_{125}$=8. Wie ließe sich die Division durch 2, 4 oder 8 in eine Multiplication verwandeln?

26. Um einen Bruch durch einen andern zu dividiren, kann man auch den Zähler des Dividends durch den Zähler des Divisors und den Nenner des Dividends durch den Nenner des Divisors dividiren, wenn diese Divisionen aufgehen. Zu beweisen.

Aufgaben zur Wiederholung.

1. Welches ist das Volumen von $1^1/_4$ Schiffslast gegossenen Eisens? Eine Schiffslast Zollvereinsgewicht = 2 metrische Milliers = 2000 Kilogramm. S. Seite 96. Aufg. 53.

2. Wieviel □ Meilen beträgt der Flächenraum von ganz Deutschland? S. Seite 46.

3. Jemand hat einen Acker von 1 Hektare $15^1/_5$ Ares mit Luzerner Klee angebaut und will einem Pächter die $^3/_4$ des Ertrages auf 4 Jahre zukommen lassen. Wieviel Pachtzins wird erfordert, wenn der Klee jährlich dreimal abgemäht werden kann und der Are bei jeder Mahde 358 Kilogr. grünes Futter liefert, welches trocken 33 Franken per tausend Kilogramm werth ist. Das Futter wiegt grün $4^1/_2$ mal so viel als trocken.

4. Ein Landmann will wissen, wieviel grünes Futter er haben muß, um 6 Zugochsen, 4 Pferde, 8 Kühe und 24 Schafe 122 Tage lang zu füttern. Man braucht $3^1/_2$ Kilogr. trockenes oder $4^1/_2$ soviel

grünes Futter für je 100 Kilogramm Gewicht des Viehes. Man nimmt an, seine Ochsen wiegen jeder 400 Kilogr., seine Pferde 300 Kilogr., seine Kühe 250 Kilogr., und 8 Schafe soviel als eine Kuh?

5. Wieviel Stück Vieh wird ein Landmann aufsetzen können, wenn er seine Aecker für Futterkräuter folgendermaßen angebaut hat: $1\frac{1}{2}$ Hektare mit Wicken, welche er einmal abmähen kann; $\frac{3}{4}$ Hektare mit Klee, den er zweimal abmähen kann und 1 Hektare mit Luzerner Klee, den er dreimal abmähen kann. Jede Mahde gibt ihm durchschnittlich 358 Kilogr. grünes Futter vom Are, und die verschiedenen Mahden folgen sich vom 1ten Mai bis zum 1ten September; man unterstellt, jedes Stück Vieh brauche durchschnittlich jeden Tag $47\frac{1}{4}$ Kilogramm grünes Futter?

6. Ein Thaler = 360 Pfennig = 375 Centimes. Wieviel Centimes beträgt 1 Pfennig (in Dezimalen zu rechnen)? wieviel Pfennig beträgt 1 Centime (in einem Bruche auszudrücken)?

7. Man vergleiche den Flächeninhalt von Deutsch-Oesterreich, Deutsch-Preußen und eines jeden deutschen Landes mit dem Flächeninhalt des Großherzogthums Luxemburg?

8. Man vergleiche den Flächeninhalt des ganzen österreichischen und des ganzen preußischen Staates mit dem von Luxemburg?

9. Man vergleiche den Flächeninhalt eines jeden deutschen Staates mit dem von Bayern?

10. Unter der specifischen Bevölkerung eines Landes versteht man die Anzahl von Menschen, welche im Durchschnitt auf einer □ Meile leben? Wie stark ist die spec. Bevölkerung der Königr. Hannover und Sachsen? S. 47.

11. Wenn man die specifische Bevölkerung des Gr. Luxemburg als Einheit annimmt, welche Zahlen bezeichnen dann die specifische Bevölkerung der polnischen Länder Oesterreichs, der ungarischen Länder, Siebenbürgens, Venetiens, des Herzogthums Schlesien, der Rheinprovinz, der Königreiche Hannover, Sachsen und Baiern? S. Seite 46.

12. Eine Frau strickt wollene Strümpfe, die sie zu 3 Fr.,50 das Paar verkauft. Das ℔ Wolle kostet $3\frac{1}{4}$ Fr. und 8 Paar Strümpfe wiegen genau 5 ℔. Wie hoch berechnet sie das Stricken eines Paares; und wieviel verdient sie täglich, wenn sie in jeder Woche (6 Tage) 5 Paar strickt?

13. Folgende Nota auszurechnen.

Herr S. schuldet an die Tuchhandlung von F.

		Fr.	Ct.
1865. Jan. 12.	2M.,40 Tuch à 15Fr.,50 den Meter.		
"	3M.,30 Futtertuch à 50 Cent. den Met.		
Febr. 13.	Ein Stück Leinwand von 31M.,50 à 1Fr.,75 den Meter. . . .		
März 12.	7M.,50 Kattun à 1Fr.,50 den Meter.		
	Total . . .		

14. Herr S. schickt die Nota zurück mit der Bemerkung, daß er seine Tücher mit der Luxemburger Elle gemessen habe, und er sich auf Franken und Dezimalen nicht verstehe. Man mache also dieselbe Rechnung nach Brüchen von Luxemb. Ellen, und nach Thalern.

15. Eine Röhre füllt in einer Stunde $^5/_{24}$ eines Wasserbehälters; wieviel Zeit braucht sie, um ihn ganz anzufüllen? b) Eine andere liefert in einer Stunde $^7/_{36}$ des Behälters, wieviel braucht diese?

16. In wieviel Zeit wird er gefüllt, wenn beide Röhren zusammen fließen?

17. Drei Röhren fließen in dasselbe Becken; die erste würde es allein füllen in 15 Stunden, die zweite in 12, die dritte in 18 Stunden. In wieviel Stunden wird das Becken sich füllen, wenn alle drei zusammen fließen?

18. Zwei Personen arbeiten zusammen. Die erste würde die Arbeit in 30, die andere würde sie in 18 Tagen machen; wann wird die Arbeit fertig?

19. Die Hälfte, das Viertel und das Drittel einer Zahl beträgt 39; welches ist diese Zahl?

20. Ein Kaufmann erhielt 500 Dutzend Teller zu 2 Fr. 70 Cts. das Dutzend; er hat 70 Franken Porto bezahlt per 1000 Stück, und 2 Franken Eingangsrecht auf dem Centner. Durchschnittlich wog ein Teller 95 Gramm, und 60 Stück kamen zerbrochen an. Wie theuer muß er das Dutzend verkaufen, um 10 Centimes auf dem Stück zu gewinnen?

21. Von einem Stück Tuch, das 25 Ellen enthielt, wurden einmal $1^1/_2$ Elle, ein andermal $5^5/_6$ Elle, dann $1^4/_5$ Elle und später

7 Ellen verkauft. Das übrige kostet 291 Franken; wie theuer war die Elle?

22. Ein Regiment, das am 10ten Morgens abreis't und am 27ten Abends an seinem Bestimmungsort ankommen soll, erhält, als es im Begriffe steht aufzubrechen, den Befehl am 21ten Abends einzutreffen, worauf der Oberst den Marsch jeden Tages um $2\frac{1}{2}$ Stunde vermehrt. Wie weit ist die Reise?

23. Eine Obsthändlerin wurde gefragt, wieviel Aepfel sie in ihrem Korbe gehabt habe. Sie erwiederte: Ich habe 50 halbfaule weggeworfen; $\frac{1}{3}$ des ganzen Vorrathes habe ich verkauft; es bleibt mir noch $\frac{1}{4}$; rechnet aus, wieviel ich hatte?

24. $\frac{4}{7}+\frac{1}{3}$ einer Zahl macht 64 weniger als $\frac{2}{3}$ derselben. Welches ist diese Zahl?

25. Hätte ich $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ von dem was ich habe, so besäße ich 300 Franken mehr; wieviel habe ich?

26. A und B sind auf eine Zeitung abonnirt, die jährlich 16 Franken kostet; im letzten Vierteljahre tritt C bei; wieviel hat jeder zu bezahlen?

27. 100 in zwei Theile zu theilen, so daß die Division des größeren Theiles durch den kleinern, ebenfalls hundert gebe?

28. Von einer Geldsumme verzehrt Jemand in einem Jahre die $\frac{2}{5}$; in den folgenden Monaten $\frac{3}{7}$ vom Reste, später $\frac{5}{6}$ von dem neuen Reste und 80 Franken; jetzt bleiben noch 80 Franken übrig; wieviel betrug die Summe?

29. Hätte A nur $\frac{2}{3}$ von dem Gelde, das er besitzt; B nur $\frac{3}{4}$ von dem seinigen; C nur $\frac{4}{5}$ und D nur $\frac{5}{6}$, so hätten Alle gleich viel und zusammen hätten sie 77 Franken weniger. Wieviel hat Jeder?

30. A hat $\frac{4}{5}$ vom Gelde des B; B $\frac{6}{7}$ vom Gelde des C, und C $\frac{3}{4}$ vom Gelde des D, und D $8\frac{1}{2}$ Franken mehr als A. Wieviel hat Jeder?

31. Würde Peter mir bezahlen, was er mir schuldig ist, so könnte ich meine Schuld bei Paul abtragen und es bliebe mir $\frac{1}{5}$ von meinem Guthaben übrig. Meine Schuld und mein Guthaben betragen zusammen 135 Franken; wieviel beträgt ein jedes?

32. Das Vierfache und der vierte Theil, das Fünffache und der fünfte Theil einer Zahl machen zusammen $283\frac{1}{2}$; welches ist diese Zahl?

33. Man hat auf einer Reise den dritten Theil und den vierten des mitgenommenen Geldes verzehrt; hätte man $11\frac{1}{4}$ Franken mehr verzehrt, so bliebe Einem die Hälfte des Geldes übrig? Wieviel hat man mitgenommen?

34. Man hat eine Zahl durch $\frac{3}{4}$ multiplizirt, dann das Product durch $4\frac{1}{2}$ dividirt und 16 zum Quotienten erhalten; welches war diese Zahl?

35. 10 in zwei Theile zu theilen, so daß $\frac{1}{3}$ des einen Theils gleich sei $\frac{3}{4}$ des andern Theiles?

36. Zwei Personen haben gleiche Einkünfte; die erste spart jährlich $\frac{1}{5}$ dieser Einkünfte; die zweite verzehrt jährlich 600 Franken mehr als die erste, und macht auf diese Weise Schulden, welche sich nach drei Jahren auf 180 Franken belaufen; welche sind die jährlichen Einkünfte?

37. Eine Obsthändlerin kauft Birnen zum Preise von 3 Sous für 7 Stück; sie verkauft dieselben zu 2 Sous für 3 Stück, und gewinnt 2 Franken und 2 Sous; wieviel Stück hatte sie gekauft?

38. Die Summe dreier Fractionen beträgt $2\frac{2}{3}$; die erste ist um $\frac{1}{3}$ kleiner als die zweite, und diese um $\frac{1}{3}$ kleiner als die dritte. Welches ist die erste?

39. Bei einer Erbschaft erhalten **A** und **B**, jeder 500 Franken mehr als **C**, so daß **C** nur den vierten Theil der ganzen Hinterlassenschaft erhält. Wieviel beträgt der Theil des **C**?

40. Ein Graben wird in 18 Stunden gefüllt, wenn man zwei Schleusen zugleich öffnet; die erste würde ihn in 30 Stunden allein füllen, wieviel braucht die zweite?

41. Ein Brunnen fließt in ein Wasserbecken und füllt es in 8 Stunden; ein anderer füllt es in 6 Stunden; ein Krahnen würde es in 3 Stunden leeren; in wieviel Stunden wird es leer, wenn es voll ist? Die beiden Brunnen fließen, während der Krahnen geöffnet ist.

42. Eine Obsthändlerin kauft eine gewisse Anzahl Aprikosen (wieviel?); die Hälfte bekam sie zu 2 für einen Sou; die andere Hälfte zu 3 für einen Sou. Sie verkauft 5 für 2 Sous und ist sehr verwundert, daß sie einen Sou verloren hat.

43. Vier Knaben theilen Aepfel. **A** nimmt die Hälfte weniger 6,

B $\frac{1}{3}$ vom Reste weniger 2, C $\frac{1}{4}$ von den übrigen weniger einen, und für D bleiben 13 übrig. Wieviel hat jeder genommen?

44. Vier Personen theilen 297 Franken. Hätte die erste die Hälfte, die zweite nur $\frac{1}{4}$, die dritte nur $\frac{1}{4}$, die vierte nur $\frac{1}{9}$ von dem, was sie wirklich erhalten haben, so hätten sie gleichviel. Wieviel bekam jede?

Gemeinschaftliche Maße. — Gemeinschaftliche Theiler. — Gemeinschaftliches Vielfaches. — Gemeinschaftlicher Nenner. — Primzahlen.

118. **Aufsuchen der gemeinschaftlichen Maße zweier Größen A und B.** Gesetzt B lasse sich von A abziehen, so ist jedes gemeinschaftliche Maß von A und B auch ein Maß von A—B. Denn, wenn z. B. A 15 und B 4 solcher Maße enthält, so enthält A—B ebenfalls eine ganze Zahl, nämlich 15—4 solcher Maße. Alle gemeinschaftlichen Maße von A und B sind also erstens Maße von B (als gemeinschaftliche Maße von A und B) und zweitens Maße von A—B, nach obigem Beweis, und folglich gemeinschaftliche Maße von B und A—B. Umgekehrt ist jedes gemeinschaftliche Maß von B und A—B auch ein Maß von A. Denn, wenn z. B. A—B solcher Maße 11 und B solcher Maße 4 enthält, so enthält A=A—B+B ebenfalls eine ganze Zahl, nämlich 11+4=15 solcher Maße. Alle gemeinschaftlichen Maße von B und A—B sind also erstens Maße von B (als gemeinschaftliche Maße von B und A—B) und zweitens Maße von A, folglich gemeinschaftliche Maße von B und A.

Unter den gemeinschaftlichen Maßen von A und B ist also keines, das sich nicht auch vorfände unter den gemeinschaftlichen Maßen von B und A—B, und unter den letzteren keines, das nicht auch zu den ersteren gehörte;

statt die gemeinschaftlichen Maße von A und B zu suchen, kann man also ebenso gut die von B und A—B suchen; man wird genau dieselben finden.

Oder allgemeiner: Gesetzt B lasse sich mehrmal, wir wollen annehmen 3 mal, von A abziehen [1]), so ist jedes gemeinschaftliche Maß von A und B, auch ein Maß von $A-B\times3$. Denn, wenn z. B. A 15 und B 4 solcher Maße enthält, so enthält $A-B\times3$ ebenfalls eine ganze Zahl, nämlich $15-4\times3$ solcher Maße. Alle gemeinschaftlichen Maße von A und B sind also erstens Maße von B (als gemeinschaftliche Maße von A und B) und zweitens Maße von $A-B\times3$, und folglich gemeinschaftliche Maße von B und $A-B\times3$.

Umgekehrt ist jedes gemeinschaftliche Maß von B und $A-B\times3$ auch ein Maß von A. Denn, wenn z. B. $A-B\times3$ solcher Maße 3 und B solcher Maße 4 enthält, so enthält A oder $A-B\times3+B\times3$ ebenfalls eine ganze Zahl, nämlich $3+4\times3$ solcher Maße. Alle gemeinschaftlichen Maße von B und $A-B\times3$ sind also erstens Maße von B (als gemeinschaftliche Maße von B und $A-B\times3$) und zweitens Maße von A, folglich gemeinschaftliche Maße von A und B.

Unter den gemeinschaftlichen Maßen von A und B ist also keines, das sich nicht auch fände unter den gemeinschaftlichen Maßen von B und $A-B\times3$, und unter den letzteren keines, das nicht auch den erstern angehörte. Statt die gemeinschaftlichen Maße von A und B zu suchen, kann man also auch die kleinere Größe B einmal oder mehrmal und überhaupt so oft, als dies thunlich ist, von der größern A

[1]) Diese Beweisführung setzt nicht nothwendigerweise voraus, daß man B, so oft als möglich von A abziehe.

abziehen und dann die gemeinschaftlichen Maße von B und dem Reste dieser Subtraction suchen; man wird genau dieselben finden.

119. Sind A und B gerade Linien, so zieht man die kleinere B so oft als möglich von der größern A ab und sucht dann in ähnlicher Weise die gemeinschaftlichen Maße von B und dem Rest.

Sind A und B ganze Zahlen, so zieht man ebenfalls die kleinere B so oft als möglich von der größern A ab, d. h. man dividirt A durch B, und sucht dann die gemeinschaftlichen Maße von B und dem Reste der Division, der kleiner als B ist, und den wir C nennen wollen. Auf diese Weise ist die Aufgabe nicht gelöst, aber auf eine einfachere zurückgeführt worden. Diese führt man wieder auf eine einfachere zurück, indem man B durch C dividirt, und dann, statt die gemeinschaftlichen Maße von B und C zu suchen, die gemeinschaftlichen Maße sucht von C und dem Reste dieser Division, der kleiner ist als C und den wir D nennen wollen.

Statt die gemeinschaftlichen Maße zu suchen von C und D, dividirt man C durch D und sucht die gemeinschaftlichen Maße von D und dem Reste dieser Division, den wir E nennen.

Dieses Verfahren setzt man fort, bis eine Division ohne Rest aufgeht. Gesetzt, man fände auf diese Weise, daß die gemeinschaftlichen Maße von A und B, dieselben sind, als die von M und N, und gesetzt die Division von M durch N gehe ohne Rest auf, und gebe 7 zum Quotienten. N ist also genau 7 mal in M enthalten und folglich ein Maß von M, und folglich ein gemeinschaftliches Maß von M und N.

Jedes Maß von N, z. B. eine Größe, die 5 mal in N enthalten ist, ist 7 mal so oft, also auch eine ganze Zahl mal, in M enthalten, folglich auch ein Maß von M und daher ein gemeinschaftliches Maß von M und N. Geht also eine von diesen Divisionen ohne Rest auf, so sind der Divisor N dieser Division und seine verschiedenen Maße (die Hälfte, das Drittel, das Viertel u. s. w. von N) gemeinschaftliche Maße von M und N und folglich auch von A und B, und diese Maße von N sind auch die einzigen gemeinschaftlichen Maße von A und B, denn eine Größe, die kein Maß wäre von N, könnte auch kein gemeinschaftliches Maß sein von M und N oder von A und B. Daraus folgt daß die verschiedenen gemeinschaftlichen Maße von A und B die verschiedenen Maße des größten gemeinschaftlichen Maßes von A und B sind.

Beispiel. Die verschiedenen gemeinschaftlichen Maße des Thalers (=375 Centimes) und des Frankens (=100 Centimes) zu suchen.

	3	1	3
375	100	75	25
300	75	75	
75	25	0	

375 C. : 100 C. gibt 3, welche ich über den Divisor 100 schreibe, und diese Division läßt einen Rest von 75 Centimes. Die gemeinschaftlichen Maße des Thalers und Frankens sind also die gemeinschaftlichen Maße von 100 Centimes und 75 Centimes. Ebenso finde ich, daß die gemeinschaftlichen Maße von 100 und 75 C. von den gemeinschaftlichen Maßen von 75 C. und 25 C. nicht verschieden sind. 25 C. geht ohne Rest auf in 75 C. und zeigt sich dadurch als gemeinschaftliches Maß von 75 und 25 C.

oder vom Thaler und Franken. Die andern gemeinschaftlichen Maße sind $^{25}/_{2}$ C., $^{25}/_{3}$ C. $^{25}/_{4}$ C. $^{25}/_{5}$ oder 5 C. u. s. w. (85).

120. Sind die beiden Größen A und B zwei ganze Zahlen, so muß dieses Verfahren mit einer Division ohne Rest endigen, denn sonst würden sich die Divisionen immer fortsetzen lassen, die Reste würden immer ganze Zahlen bleiben, immer kleiner werden und nie verschwinden, was unmöglich ist.

Wenn aber A und B andere Größen z. B. Linien sind, so wird dieß meistens nicht der Fall sein. Man wird dann dieses Verfahren fortsetzen, bis man einen Rest findet, der so klein ist, daß man ihn nicht zu berücksichtigen braucht und den man alsdann als Null betrachtet.[1]) Aus diesem Verfahren ergibt sich ferner, daß, wenn A und B ganze Zahlen sind, man für ihr größtes gemeinschaftliches Maß ebenfalls eine ganze Zahl finden muß. Die andern gemeinschaftlichen Maße sind dieß entweder nicht, oder sind dieß nicht alle.

121. Wollte man das größte gemeinschaftliche Maß M der Größen A, B, C, D, suchen, so würde man damit anfangen, das größte gemeinschaftliche Maß von A und B zu suchen, das wir b nennen wollen. M, als Maß von A und B, muß sich finden unter den Maßen von b; als gemeinschaftliches Maß von A, B, C auch unter den Maßen von C, also unter den gemeinschaftlichen Maßen von b und C. Man sucht also das größte gemeinschaftliche Maß von b

[1]) Uebrigens wird man bald einen Rest finden, der so klein ist, daß wir keine Werkzeuge mehr haben, um ihn zu messen. Größen, die kein gemeinschaftliches Maß haben, heißen incommensurabele Größen und die eine kann nicht genau durch einen Bruch der andern ausgedrückt werden; z. B. eine Seite und die Diagonale eines Quadrates, der Radius und die Peripherie eines Kreises.

und C, das wir c nennen wollen. Als gemeinschaftliches Maß von b und C muß M sich vorfinden unter den Maßen von c; als gemeinschaftliches Maß von A, B, C, D auch unter den Maßen von D; man sucht also das größte gemeinschaftliche Maß von c und D; dieses ist das größte gemeinschaftliche Maß von A, B, C, D. Es ist ein Maß von D und c, folglich ein Maß von C und b, folglich ein Maß von A und B.

122. Je größer das der Einheit und einer zu bestimmenden Größe gemeinschaftliche Maß ist, desto kleiner werden Zähler und Nenner und desto einfacher wird der Bruch sein. Wählt man also zur Bestimmung der Größe das größte gemeinschaftliche Maß, so wird man die einfachste Bezeichnung derselben finden.

Beispiel. Da das größte gemeinschaftliche Maß des Thalers und des Frankens 25 Centimes ist, und dieses 15 mal im Thlr. und 4 mal im Fr. enthalten ist, so ist der einfachste Bruch, welcher bezeichnet, wieviel Thlr. ein Franken macht, $^4/_{15}$.

Die andern gemeinschaftlichen Maße sind die verschiedenen Maße des größten, nämlich die Maße, welche man findet, wenn man das größte in 2, 3, 4 und überhaupt in eine ganze Zahl von gleichen Theilen zerlegt. Man findet also alle andere Brüche, welche eine Größe bezeichnen, wenn man Zähler und Nenner des einfachsten Bruches mit 2, 3, 4 und überhaupt mit einer ganzen Zahl multiplizirt. Beispiel. Die andern Brüche, welche bezeichnen, wieviel Thlr. ein Franken macht, sind $^8/_{30}$, $^{12}/_{45}$, $^{16}/_{60}$, u. s. w. überhaupt alle Brüche und nur die Brüche, welche man findet, wenn man Zähler und Nenner von $^4/_{15}$ mit einer ganzen Zahl multiplizirt.

123. Um einen Bruch auf seinen einfachsten Ausdruck

zurückzuführen, sucht man das größte gemeinschaftliche Maß von Zähler und Nenner, und dividirt Zähler und Nenner durch dasselbe. Beisp. $^{100}/_{375}$. Die durch diesen Bruch bezeichnete Größe enthält 100 Maße, von denen die Einheit 375 enthält. Das größte gemeinschaftliche Maß dieser Größe und der Einheit besteht demnach aus 25 solcher Maße, und jene Größe enthält dieses größte gemeinschaftliche Maß 4 mal, während die Einheit dasselbe 15 mal enthält. Der einfachste Ausdruck jener Größe ist demnach $^{4}/_{15}$.

Anmerkung. Findet man als größtes gemeinschaftliches Maß von Zähler und Nenner die Zahl 1, z. B. bei den Brüchen $^{8}/_{21}$, $^{4}/_{15}$ so hat der Bruch seinen einfachsten Ausdruck, denn man findet als einfachste Ausdrücke $^{8:1}/_{21:1}={}^{8}/_{21}$ und $^{4:1}/_{15:1}={}^{4}/_{15}$ [1]).

124. Ganze Zahlen, die Maße sind von einer andern ganzen Zahl, heißen **Theiler** dieser andern. Beispiel 1, 2, 3, 4, 6, 12 sind Theiler von 12.

Theiler einer jeden ganzen Zahl sind also die Einheit und diese Zahl selbst.

125. Ganze Zahlen, die keinen andern Theiler haben als sich selbst und die Einheit, heißen **Primzahlen** (absolute Primzahlen.) Solche sind 1, 2, 3, 5, 7, 11, 19, 23, 29 u. s. w.

126. Eine ganze Zahl, die ein Theiler ist von mehrern andern, heißt ein **gemeinschaftlicher Theiler** dieser andern. Beisp. 3 ist ein gemeinschaftlicher Theiler von 3, 6, 15. 1 ist also ein gemeinschaftlicher Theiler aller ganzen Zahlen.

127. Ganze Zahlen, welche keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben, als die Einheit,

[1]) Wie kann man dieß noch anders erklären?

heißen **Primzahlen zu einander** (relative Primzahlen.) So sind also 15 und 8 Primzahlen zu einander. Alle Primzahlen sind auch Primzahlen zu einander (warum)?

128. Der größte gemeinschaftliche Theiler von zwei ganzen Zahlen ist ihr gemeinschaftliches größtes Maß (121) und wird nach der Regel von 121 gefunden.

129. Sind Zähler und Nenner eines Bruches Primzahlen zu einander, so ist dieser Bruch auf die einfachste Weise ausgedrückt. Beispiel: $\frac{4}{15}$, $\frac{8}{21}$.

Siehe Anm. zu 123.

130. Eine Zahl, welche Primzahl ist zu zwei andern, ist auch Primzahl zu deren Product. Beispiel: 15 ist Primzahl zu 4 und 28.

Gesetzt 4×28 sei theilbar durch 15 und gäbe zum Quotienten eine ganze Zahl, welche wir C nennen wollen, so daß $4\times28=15\times C$. Dann wäre auch

$$\frac{4\times28}{15\times28}=\frac{15\times C}{15\times28} \text{ oder } \frac{4}{15}=\frac{C}{28}.$$

Da nach der Voraussetzung 15 Primzahl ist zu 4, so hat der erste Bruch seinen einfachsten Ausdruck. Der andere Ausdruck müßte sich also finden lassen, indem man Zähler und Nenner des ersten durch eine ganze Zahl multiplizirt; C müßte ein Vielfaches sein von 4, und 28 ein Vielfaches von 15. Letzteres ist aber nicht möglich, wenn nach der Voraussetzung 15 auch Primzahl ist zu 28.

131. Eine Zahl, welche Primzahl ist zu mehreren andern, ist auch Primzahl zu deren Producte.

Beispiel. 15 ist Primzahl zu 4, 28, 11, 77, 49. Da 15 Primzahl ist zu 4 und 28, ist es auch Primzahl zu 4×28 (130); da 15 Primzahl ist zu 4×28 und zu 11, so ist es auch Primzahl zu $4\times28\times11$ (130); da 15 Primzahl ist zu $4\times28\times11$ und zu 77, so ist es auch

Primzahl zu $4 \times 28 \times 11 \times 77$; da 15 Primzahl ist zu $4 \times 28 \times 11 \times 77$ und zu 41, so ist es auch Primzahl zu $4 \times 28 \times 11 \times 77 \times 49$.

132. Ein **Product von Primzahlen** kann nicht einem andern Producte von Primzahlen gleich sein. Denn erstens kann nicht ein Product einen Primfactor enthalten, der nicht in einem andern ihm gleichen ebenfalls enthalten wäre. Beispiel. $2 \times 3 \times 5 \times 7$ und $5 \times 3 \times 5 \times 3$. Da 2 nicht in letzterem Producte als Factor vorkommt, so ist 2 Primzahl zu jedem Factor desselben (127), also Primzahl zu diesem Producte. Es kann also dem ersteren, das durch 2 theilbar ist, nicht gleich sein. Zweitens kann nicht ein Product einen Primfactor öfter enthalten als ein anderes ihm gleiches Product. Beispiel: $3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7$ und $3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7$. Dividirt man beide Producte durch 3×3 so erhält man $3 \times 5 \times 7 \times 7$ und $5 \times 5 \times 5 \times 7$. Wären die ersten Producte gleich, so wären es ebenfalls diese Quotienten; da aber 3 im ersteren und nicht im letzteren als Primfactor vorkommt, so ist dieß nicht möglich.

Anmerkung. Obigen Grundsatz kann man auch so ausdrücken: Eine ganze Zahl läßt sich nur auf eine einzige Weise in Primfactoren zerlegen. [1])

133. Ein **Product** von Primzahlen ist dann und nur dann **theilbar** durch ein anderes Product von Primzahlen, wenn ersteres alle Factoren des letzteren enthält und jeden wenigstens so oft, als er in letzterem sich vorfindet. Denn, wäre z. B. das Product $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11$ theilbar durch 3×7 oder durch $2 \times 3 \times 3 \times 3$, obschon es den Factor 7 gar nicht und den

[1]) Bezieht sich natürlich nur auf die Factoren und deren Zahl, nicht auf ihre Ordnung.

Factor 3 nicht 3 mal enthält, so müßten die Divisionen $\frac{2\times2\times3\times3\times11}{3\times7}$ und $\frac{2\times2\times3\times3\times11}{2\times3\times3\times3}$ ganze Zahlen geben. Die Quotienten sind aber $\frac{2\times2\times3\times11}{7}$ und $\frac{2\times11}{3}$, was keine ganze Zahlen geben kann, da der eine Zähler nicht durch 7 und der andere nicht durch 3 theilbar ist.

134. Wie man eine ganze Zahl in ihre Primfactoren zerlegt, wollen wir an einem Beispiele, 4590, zeigen.

4770	2
2385	3
795	3
285	5
53	53
1	

Man untersucht zuerst, ob sie durch die kleinste Primzahl nach der Einheit, nämlich 2 theilbar ist. Diese Division ist möglich, ich setze darum 2 neben 4770 und schreibe darunter den Quotienten 2385. Ich untersuche, ob dieser Quotient noch ferner durch 2 theilbar ist, und nachdem ich gefunden, daß dieß der Fall nicht ist, ziehe ich den Schluß, daß der Factor 2 nur einmal vorkommt. Ich untersuche nun, ob diese Zahl die nun folgende Primzahl —3— als Factor enthält. Da sie durch 3 theilbar ist, setze ich die 3 neben 2295 und darunter den Quotienten. Ein zweiter Versuch zeigt, daß auch dieser Quotient durch 3 theilbar ist. Ein dritter Versuch zeigt, daß der nunmehrige Quotient den Factor 3 nicht mehr enthält: derselbe kommt also nur zweimal vor. Ich prüfe nun, ob die folgende Primzahl —5— als Factor vorkommt. Da dieß der Fall ist, dividire ich durch 5 und erhalte nun den Quotienten 53, der den Primfactor 5 nicht mehr enthält, ebensowenig, als die folgenden Primfactoren 7 und 11. Weiter brauche ich die Untersuchung nicht fortzusetzen. Denn da 11×11 größer ist, als 53, so kann 53 nicht das Product von mehreren Primfactoren sein, die größer als 11 sein

müßten. 53 ist also selbst Primzahl. Demnach ist $4770 = 2 \times 2385 = 2 \times 3 \times 795 = 2 \times 3 \times 3 \times 285 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 53$, und ist auf letztere Weise in Primfactoren zerlegt.

135. Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer ganzen Zahlen. Beispiel: Welches ist die kleinste Zahl, welche durch 147, 90, 24, 55 theilbar ist?

Man zerlegt diese Zahlen in ihre Primfactoren;

$147 = 3 \times 7 \times 7$

$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$55 = 5 \times 11$. Damit eine Zahl durch alle diese Zahlen theilbar sei, muß sie den Factor 2 wenigstens dreimal enthalten, denn sonst könnte sie nicht durch 24 theilbar sein (130). Den Factor 3 muß sie wegen 90 wenigstens zweimal, den Factor 5 wenigstens einmal und ebenso den Factor 11 wenigstens einmal enthalten. Man schreibt dann ein Product an, das jeden Factor obiger Producte so viel mal enthält, als das Product, in welchem er am öftesten vorkommt, nämlich $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 5 \times 11$. Dieses Product ist durch alle obigen Factoren theilbar (133) und ein kleineres Vielfaches obiger Zahlen kann es nicht geben, weil jedes Vielfache desselben wenigstens aus jenen Factoren bestehen muß.

Um den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner mehrerer Brüche zu finden, führt man sie zuerst auf ihre einfachsten Ausdrücke zurück; jeder gemeinschaftliche Nenner muß dann ein Vielfaches der einzelnen Nenner sein (122), und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der einzelnen Nenner ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner.

136. Eine Dezimalzahl von 2, 4, 5, 9 und überhaupt einer bestimmten Zahl Dezimalstellen läßt sich verwandeln in einen gewöhnlichen Bruch, dessen Nenner 2, 4, 5, 9 mal den Factor $10=5\times2$ oder 2, 4, 5, 9 mal den Factor 5 und ebenso oft den Factor 2 enthält.

Beispiel: $3{,}03750=\frac{303750}{100000}=\frac{303750}{10\times10\times10\times10\times10}=\frac{303750}{5\times2\times5\times2\times5\times2\times5\times2\times5\times2}$.

Zerlegt man auch den Zähler in seine Primfactoren $\frac{2\times3\times3\times3\times3\times3\times5\times5\times5\times5}{5\times2\times5\times2\times5\times2\times5\times2\times5\times2}$ und streicht man die gleichen Factoren, so erhält man den einfachsten Ausdruck dieses Bruches $=\frac{3\times3\times3\times3\times3}{5\times2\times2\times2\times2}$; der einfachste Ausdruck eines Bruches, welcher einer nicht periodischen Dezimalzahl gleich ist, kann also im Nenner bloß die Factoren 2 und 5 enthalten.

Ein Bruch, dessen einfachster Ausdruck im Nenner einen andern Factor als 2 und 5 enthält, kann darum nicht einer Dezimalzahl von einer bestimmten Anzahl Stellen gleich sein, und läßt sich also nur in eine periodische Dezimalzahl verwandeln, z. B. $^{164}/_{700}$; $^{200}/_{11}$; $^{24}/_{7}$ (Vgl. S. 81). $^{21}/_{28}$ gibt aber keine periodische Dezimalzahl; warum?

Um einen Bruch, dessen einfachster Ausdruck im Nenner bloß die Factoren 2 und 5 enthält, in eine Dezimalzahl zu verwandeln, braucht man nur Zähler und Nenner desselben so oft mit 2 oder 5 zu multipliziren, bis der Nenner die Factoren 2 und 5 in gleicher Anzahl enthält. Beispiel: $\frac{25}{8}=\frac{25}{2\times2\times2}=\frac{25\times5\times5\times5}{2\times2\times2\times5\times5\times5}=\frac{3125}{10\times10\times10}=\frac{3125}{1000}=3{,}125.$

Aufgaben.

1. (118, 119, 120) Welche sind die drei größten gemeinschaftlichen Maße von 1 Thaler und 1 österr. Florin; von 1 Thaler und 1 rhein. Gulden; von 1 österr. Florin und 1 rhein. Gulden; von 2 Thaler und 1 rhein. Gulden?

2. Welche sind die zwei größten gemeinschaftlichen Maße von 1 Tag und 16 Stunden; von 2 Tagen und 32 Stunden; von 1 Meter und 1 Luxemburger Elle; von 1 Kilogramm und 155 Gramm?

3. Welches ist das größte gemeinschaftliche Maß von 30 und 48; von 58 und 174; von 888 und 962; von 6566 und 7772; von 65660 und 77720; von 6566×3 und 7772×3; von 6566×7 und 7772×7; von 377 und 98; von 377×2 und 98×2; von 213 und 41; von 3785 und 2933?

4. Man suche auf ähnliche Weise das größte gemeinschaftliche Maß von $^1/_{18}$ und $^1/_{24}$; von $^1/_{30}$ und $^1/_{48}$; von $^1/_{58}$ und $^1/_{174}$?

5. (121) Welches ist das größte gemeinschaftliche Maß von 12, 15 und 20; von 180, 390 und 42; von 135, 99 und 66?

6. Man suche auf ähnliche Weise das größte gemeinschaftliche Maß von $^1/_{12}$, $^1/_{15}$, $^1/_{20}$.

7. (122, 123) Welche sind die drei einfachsten Bezeichnungen der Brüche $^{30}/_{48}$; $^{58}/_{174}$; $^{25}/_{90}$; $^{29}/_{32}$; $^{27}/_{45}$.

8. Man vereinfache die Brüche $^{5796}/_{7308}$; $^{972864}/_{2134080}$; $^{7670}/_{3866}$.

9. (124) Welche sind die verschiedenen Theiler von 24, 36 u. 50?

10. (125) Welche sind die sechs Primzahlen, die auf 29 folgen?

11. (134) Folgende Zahlen sollen in ihre Primfactoren zerlegt werden: 36, 48, 50, 57, 60, 64, 81, 144, 54600.

12. (135) Welches ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 8 und 6; von 9 und 12; von 4 und 10; von 14 und 21; von 24 und 36; von 8, 6, 9 und 12; von 20 und 52; von 4, 10, 14 u. 21?

13. Welches ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner der Brüche $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^1/_6$, $^3/_8$, $^5/_{12}$, $^7/_{24}$?

14. Wieviel macht $^1/_2 + ^3/_4 + ^2/_5 + ^3/_{10} + ^2/_{25}$?

15. Wieviel macht $^1/_2 + ^1/_3 - ^3/_4 + ^4/_5 - ^1/_6 + ^2/_8 - ^3/_{10} + ^5/_{12} - ^2/_{15} + ^{21}/_{24} - ^7/_{30} + ^{31}/_{40} + ^{40}/_{45} + ^7/_{60} - ^7/_{120}$?

16. Wiederholung der Aufg. 9, S. 113.

17. Man vereinfache die Brüche der Aufg. 6 und 7, indem man

Zähler und Nenner in ihre Primfactoren zerlegt, dann alle Factoren, die sich zugleich in Zähler und Nenner vorfinden, streicht. Man beweise a) daß jetzt Zähler und Nenner Primzahlen zu einander sind; b) daß der größte gemeinschaftliche Theiler der frühern Zähler und Nenner das Product der gemeinschaftlichen Factoren ist, und c) daß man also den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen auch findet, indem man diese in Primfactoren zerlegt und dann die gemeinschaftlichen Primfactoren mit einander multiplizirt, wobei man jeden Primfactor so oft nimmt, als er gemeinschaftlicher Factor ist, d. h. als er in dem Producte vorkommt, das ihn am wenigsten oft enthält.

18. Man löse auf diese Weise die Aufgaben 3.

19. Wie kann man in ähnlicher Weise den größten gemeinschaftlichen Theiler von drei oder mehr Zahlen finden?

20. Diese Regel anzuwenden auf die Aufgaben 5.

21. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von zwei Zahlen findet man, indem man ihr Product durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt. Zu beweisen aus der Regel c) von Aufgabe 16. (Vergl. Aufg. 4.)

22. Diese Regel anzuwenden auf die fünf ersten der Aufgaben 12.

23. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von **A**, **B**, **C**, **D** findet man, indem man zuerst nach obiger Regel das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von **A** und **B** sucht, dann das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Zahl und **C**, dann das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieses Vielfachen und **D**. Zu beweisen. Man vergleiche Aufg. 6, worin man auf ähnliche Weise den gemeinschaftlichen Nenner gesucht hat.

24. Man suche auf diese Weise das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 8, 6, 9 und 12; von 4, 10, 14 und 21; von 12, 15, 10. (Vergl. Aufg. 6.)

25. Wiederholung der Aufg. 12, 13, 14 mit Anwendung dieses Verfahrens.

26. (136) Folgende Brüche ohne Anwendung der Division in Dezimalzahlen zu verwandeln, $^1/_2$, $^3/_4$, $2^1/_5$, $3^5/_8$, $^6/_{12}$, $5^1/_{16}$, $2^2/_{25}$, $1^8/_{40}$, $5^3/_{50}$, $^5/_{64}$, $^{17}/_{125}$, $^9/_{128}$.

Theilbarkeit der Zahlen.

137. Beim Vereinfachen der Brüche und der Zerlegung eines Productes in seine Primfactoren ist es wichtig, daß man leicht erkenne, durch welche Zahlen eine Zahl theilbar sei.

Wenn man eine Zahl A in zwei Theile zerlegt, B und C, so ist das Neunzehntel von A = dem Neunzehntel von B + dem Neunzehntel von C, oder $\frac{A}{19}=\frac{B}{19}+\frac{C}{19}$. Wählt man nun den Theil B so, daß er durch 19 theilbar ist, so ist das Neunzehntel von A = eine ganze Zahl + das Neunzehntel von B. Das Neunzehntel von A ist also dann, und nur dann eine ganze Zahl, wenn das Neunzehntel von B eine ganze Zahl oder Null ist. Oder, wenn man eine ganze Zahl A in zwei Theile theilt, von denen der eine B durch 19 oder überhaupt durch irgend eine ganze Zahl theilbar ist, so ist A dann und nur dann theilbar durch diese ganze Zahl, wenn C durch diese ganze Zahl theilbar[1]), oder Null ist.

138. Eine Zahl ist theilbar durch **10**, wenn sie mit einer Null endigt. Beispiel. $650=65\times10$.

139. Eine Zahl ist theilbar durch **2**, wenn ihre letzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist. Beispiel. 1864 kann man zerlegen in $B = 186\times10=186\times5\times2$ und $C = 4$.

B ist theilbar durch 2; A ist es also, wenn C oder die Ziffer der Einer 0 ist, oder theilbar ist durch 2, nämlich 2, 4, 6 oder 8 ist.

[1]) Im Grunde genommen sind dieß nur die Lehrsätze von Nr. 118. Man weise es nach.

Anmerkung. Eine Zahl oder Ziffer, die theilbar ist durch 2, heißt eine gerade Zahl oder Ziffer. Eine Zahl ist also gerade, wenn die Ziffer der Einer gerade ist.

140. Eine Zahl ist theilbar durch **5**, wenn die Ziffer ihrer Einer 0 oder 5 ist. Beispiel. 1865 läßt sich zerlegen in $B=186\times10=186\times2\times5$ und $C=5$. B ist theilbar durch 5; damit also A theilbar sei durch 5, muß die Ziffer der Einer 0 oder 5 sein, denn keine andere Ziffer ist theilbar durch 5.

141. Eine Zahl ist theilbar durch **100**, wenn sie mit 2 Nullen endigt. Beispiel. $1800=18\times100$.

142. Eine Zahl ist theilbar durch **4** oder **25**, wenn ihre beiden letzten Ziffern eine Zahl bilden, die durch 4 oder 25 theilbar ist. Beispiel. 1875 läßt sich zerlegen in

$B=18\times100=18\times10\times10=18\times2\times5\times2\times5$ und

$C=75$. B ist theilbar durch 2×2 oder 4 und durch 5×5 oder 25; damit es also A sei, muß die durch die beiden letzten Ziffern gebildete Zahl durch 4 oder 25 theilbar sein [1]).

143. Eine Zahl ist theilbar durch **1000, 10000,** u. s. w., wenn die 3, 4 letzten Ziffern, u. s. w., Nullen sind. Beispiel. $160000=16\times10000$.

144. Eine Zahl ist theilbar durch $2\times2\times2=$ **8**, oder durch $5\times5\times5=$ **125**, wenn ihre drei letzten

[1]) Strenge genommen müßten wir hinzufügen: oder 0 sein; wir können dieß aber auch darunter verstehen. Wenn B theilbar ist durch eine ganze Zahl und C ist Null, so kann man übrigens behaupten, beide Theile seien durch diese Zahl theilbar, weil keiner bei der Division einen Rest läßt.

Ziffern eine durch 8 oder 125 theilbare Zahl bilden. Beispiel. 35016 läßt sich zerlegen in $B=35\times1000=35\times10\times10\times10=35\times2\times5\times2\times5\times2\times5$ und $C=16$. B ist theilbar durch $2\times2\times2$, sowie durch $5\times5\times5$; also ist A durch 8 oder 125 theilbar, wenn C = die durch die drei letzten Ziffern gebildete Zahl, durch 8 oder 125 theilbar ist.

145. Eine Zahl ist theilbar durch **9**, wenn ihre Ziffern, als einfache Einer betrachtet, eine Summe geben, die durch 9 theilbar ist. Beispiel. $64035=6\times10000+4\times1000+3\times10+5$, was sich zerlegen läßt in

$B=6\times9999+4\times999+3\times9$ und

$C=6 \quad +4 \quad +3 \quad +5$. Wenn man B durch 9 dividirt, findet man die ganze Zahl $6\times1111+4\times111+3$; A ist also theilbar durch 9, wenn die Summe der Ziffern $6+4+3+5$ theilbar ist durch 9.

146. Eine Zahl ist theilbar durch **3**, wenn ihre Ziffern, als bloße Einheiten betrachtet, eine Summe geben, die durch 3 theilbar ist. Man beweist dieses auf dieselbe Weise, wie in voriger Nummer.

147. Eine Zahl ist theilbar durch **11**, wenn die Ziffern der ungeraden Stellen (der 3ten, 5ten, 7ten ꝛc.) eine Summe geben, die der Summe der Ziffern der geraden Stellen gleich ist, oder wenn die eine die andere um ein Vielfaches von 11 übersteigt.

Beispiel a) worin die geraden und ungeraden Stellen dieselbe Summe geben: 314259.

b) worin die Ziffernsumme der geraden Stellen die der ungeraden um 22 übersteigt: 72928163.

c) worin die Ziffernsumme der ungeraden Stellen die der geraden um 22 übersteigt: 27291836.

d) worin der Unterschied der beiden Ziffernsummen nicht durch 11 theilbar ist: 345012.

a) 314259=31425×10+9=31425×11—31425+9, oder
314259= Vielfaches von 11—31425+9. Ebenso ist
31425= Vielfaches von 11 —3142+5, und
3142= Vielfaches von 11 —314+2, u. s. w.
was wir auf folgende Weise anschreiben wollen.

314259 = Vielf. v. 11 —31425 +9
Vielf. v. 11 —3142+5 = ... 31425
3142 = Vielf. v. 11 —314 +2
Vielf. v. 11 —31 +4 = ... 314
31 = Vielf. v. 11 —3 +1
3 = ... 3

Addirt man die Zahlen, welche vor dem Zeichen der Gleichheit stehen, so wie die sechs gleichen Zahlen, welche darauf folgen, und berücksichtigt man, daß die Summe von zwei oder drei Vielfachen von 11 ebenfalls ein Vielfaches von 11 ist (warum?), so findet man
314259+ Vielf. v. 11+5+4+3 = Vielf. v. 11+9+2+1

Da die Ziffernsumme 5+4+3=9+2+1, so ist
314259+ Vielf. v. 11= Vielf. v. 11 und folglich ist
314259 ein Vielf. von 11. (137)

Eine ähnliche Rechnung gäbe

b) 72928163+ Vielf. v. 11 +6+8+9+7= Vielf. v. 11 +3+1+2+2.

c) 27291836+ Vielf. v. 11 +3+1+2+2= Vielf. v. 11 +6+8+9+7 und

d) 345012+ Vielf. v. 11 +1+5+3 = Vielf. v. 11 +2+0+4, und indem man in den drei Fällen die kleinere Ziffernsumme von jeder der beiden gleichen Größen abzieht:

b) 72928163+ Vielf. v. 11+ Vielf. v. 11= Vielf. v. 11 oder 72928163+ Vielf. v. 11= Vielf. v. 11.

c) 27291836+ Vielf. v. 11= Vielf. v. 11+ Vielf. v. 11, oder 27291836+ Vielf. v. 11= Vielf. v. 11.

d) 345012+ Vielf. v. 11 +3= Vielf. v. 11.

Folglich sind die Zahlen von b und c theilbar durch 11, so wie die Zahl 345012+3; die Zahl 345012 also nicht. (Wieviel bleibt übrig, wenn man sie durch 11 dividirt?)

148. Eine Zahl ist durch 6=2×3 theilbar, wenn sie die Factoren 2 und 3 enthält (133) d. h. wenn sie gerade ist und ihre Ziffernsumme durch 3 theilbar ist.

149. Eine Zahl ist durch 12=2×2×3 theilbar, wenn sie durch 4 und durch 3 theilbar ist. (Es genügt nicht, daß sie durch 6 und 2 theilbar sei, warum?)

Aufgaben.

1. (138) Leichte Mittel, den Rest einer Division zu erkennen, sind oft sehr nützlich; bei manchen Rechnungen reicht es sogar hin diesen Rest zu kennen (Vgl. unten, Aufg. 25). Aus den Regeln über die Theilbarkeit der Zahlen ergeben sich unmittelbar andere über diesen Rest. Welchen Rest läßt die Division von 27, von 375, von 1864 durch 10? Welche Quotienten geben diese Divisionen?

2. (139) Die Division jeder ungeraden Zahl durch 2 läßt zum Rest 1. Zu beweisen.

3. Das Product von zwei oder mehr ungeraden Zahlen ist ungerade; und eine ungerade Zahl kann nur das Product ungerader Factoren sein. Zu beweisen.

4. Karl hat in einer Hand eine gerade Anzahl Erbsen und in der andern eine ungerade Anzahl. Ernst ersucht ihn, die Zahl der rechten Hand mit 2, die der linken Hand mit 3 zu multipliziren. Er fragt die Summe der beiden Producte und er erkennt an dieser Summe, in welcher Hand Karl die gerade Zahl Erbsen hatte. Wie läßt sich das erklären?

5. (140) Welchen Quotienten und Rest gibt die Division einer ganzen Zahl durch 5?

6. (141. 142. 143) Welchen Quotienten und Rest gibt die Division einer ganzen Zahl durch 100, durch 4, durch 25?

7. (143. 144) Welchen Quotienten und Rest gibt die Division einer ganzen Zahl durch 1000, durch 8, durch 125?

8. (145) Um den Quotienten und Rest der Division 35789746 : 9 zu finden verfährt man in folgender Weise. Man fängt mit der höchsten Stelle an und spricht 3=3; **plus** 5=8; **plus** 7=15; **plus** 8=23; **plus** 9=32; **plus** 7=39; **plus** 4=43; **plus** 6=49; und schreibt diese Summen so an, daß jede auf einer Stelle weiter rechts stehe. Dann addirt man die Ziffern der letzten Summe 4+9=13, und setzt diese unter die vorige Zahl, ohne sie weiter zu rücken. Die Ziffernsumme der letzten Zahl 1+3=4 gibt den Rest. Man streicht alsdann die Einer, addirt, wie bei der Multiplication, und findet durch diese Rechnung den Quotienten. Zu beweisen.

```
38
 15
  23
   32
    39
     43
      49
      13
3976638
```

Wäre der Rest größer als 9, so würde man den Quotienten um 1 Einheit vermehren und den Rest um 9 vermindern.

9. a) Den Rest einer Division durch 9 findet man, wenn man die Ziffern addirt und von dieser Summe 9 abzieht, so oft als dieß möglich ist. Zu beweisen. b) Dieses Verfahren kann man vereinfachen dadurch, daß man die Ziffer 9 oder zwei Ziffern, die zusammen 9 machen, nicht mit addirt, und statt eine mehrzifferige Zahl zu addiren, ihre Ziffernsumme ausrechnet und addirt. Zu beweisen. Beispiel. In obiger Zahl machen die beiden äußersten Ziffern zusammen 9; die zweite und vorletzte ebenfalls 9; diese und die 9, welche in der Zahl vorkommt, zähle ich nicht mit; und spreche also 7 und 8, macht 15; 1 und 5 macht 6; und 7 macht 13; 1 und 3 macht 4.

10. Probe durch 9. Schreibt man neben jeden Summanden einer Addition den Rest der Division dieses Summanden durch 9 (Ziffernsumme, oder Ziffernsumme der Ziffernsumme), und addirt man diese Reste, so muß die Division dieser Summe durch 9 denselben Rest geben, als die Division der Additionssumme durch 9. Zu beweisen. Beispiel.

2341;	10 oder 1	1+4+0+6=11.
805;	13 oder 4	1+1=2.
9162;	18 oder 0	
99501;	24 oder 6	
111809;	20 oder 2.	2+0=2

11. Bei einer Subtraction muß der Rest der Division des Minuends durch 9 = sein dem Reste der Division des Subtrahends durch 9 + dem Reste der Division der Differenz durch 9, oder dem Reste, den man findet, wenn man die Summe dieser beiden Reste durch 9 dividirt. Zu beweisen.

12. Bei der Multiplication muß der Rest der Division des Productes durch 9 gleich sein dem Producte der Reste, welche man findet, wenn man beide Factoren durch 9 dividirt, oder dem Reste, den man findet, wenn man dieses Product durch 9 dividirt. Zu beweisen.

13. Bei der Division sucht man ebenfalls die Reste der Division des Dividends, Divisors, Quotienten und des Restes durch 9. Man addirt den letzten Rest zum Product des dritten und zweiten, und sucht auch hievon den Rest der Division durch 9; dieser letzte Rest muß dem ersten gleich sein. Zu beweisen.

14. Man bittet Jemanden sich eine Zahl zu denken, eine Null hinzuzufügen, hievon die erste Zahl abzuziehen, die Ziffern dieses Restes zu addiren, und wenn man auf diese Weise eine mehrzifferige Zahl findet, die Ziffern wieder zu addiren und sagt ihm dann, jetzt habe er 9 herausbekommen. Wie konnte man das wissen?

15. Man bittet Jemanden sich eine Zahl zu denken, dann aus denselben Ziffern eine andere Zahl zu bilden, die kleinere von beiden Zahlen von der größern abzuziehen, die Ziffern dieses Restes zu addiren und, wenn diese Summe eine zweizifferige Zahl ist, diese Zifferaddition noch einmal vorzunehmen und sagt ihm dann, jetzt habe er 9 herausbekommen. Warum muß dieß so sein?

16. Man bittet Jemanden sich eine Zahl zu denken, auf beliebige Weise zwischen die Ziffern dieser Zahl 2 und 5 einzuschalten, von der neuen Zahl die erste abzuziehen, und wie in den vorigen Beispielen die Zifferaddition des Restes vorzunehmen, und sagt ihm dann, jetzt habe er 7 herausbekommen. Woher konnte man das wissen?

17. Man bittet Jemanden sich eine mehrzifferige Zahl zu denken, daraus irgend eine Ziffer zu streichen, diese neue Zahl von der ersten abzuziehen, wie in obigen Beispielen die Zifferaddition des Restes zu machen, und fragt dann, was dabei herauskomme. Man erhält zur Antwort: 4. 4 war also die weggestrichene Ziffer; warum?

18. Welches wäre die weggestrichene Ziffer gewesen, wenn die letzte Ziffernaddition 9 ergeben hätte?

19. (146) Den Rest der Division einer Zahl durch 3 findet man, wenn man von der Ziffernsumme das höchste Vielfache von 3, das man abziehen kann, abzieht. Beim Ausrechnen dieser Ziffernsumme kann man die Ziffern oder Summen 3, 6, 9 auslassen. Zu beweisen.

20. (147) Den Rest der Division einer Zahl durch 11 findet man, indem man die Summe der Ziffern der geraden Stellen von der Summe, der Ziffern der ungeraden Stellen abzieht. Ist diese Subtraction nicht möglich, so fügt man zu der letzten Summe 11 oder ein Vielfaches von 11 hinzu. Bei der Addition der Ziffern kann man immer 11 oder ein Vielfaches von 11 vernachlässigen. Zu beweisen.

21. Der eine Factor eines Productes läßt auf diese Weise einen Rest von 4 Einheiten; der andere einen Rest von 7 Einheiten; welchen Rest läßt das Product?

22. 1000 = Vielfaches von 37+1. Also findet man den Rest der Division einer ganzen Zahl durch 37, wenn man diese Zahl, wie bei der Numeration, in Gruppen von drei Ziffern theilt, diese Gruppen als allein stehende Zahlen addirt, mit dem Reste ebenso verführt, bis man eine Zahl von weniger als vier Ziffern findet und dann den Rest der Division dieser Zahl durch 37 sucht. Zu beweisen.

23. Um den Rest der Division einer Zahl durch 7 oder 13 zu finden, theilt man diese Zahl ein in Gruppen von drei Ziffern, wie bei der Numeration; man addirt die erste, dritte, fünfte Gruppe und zieht davon die Summe der zweiten, vierten, sechsten Gruppe ab; dividirt man die Zahl, welche man auf diese Weise findet, durch 7 oder 13, so läßt diese Division denselben Rest, als die erste Division.

Anmerkung. 7 oder 13, sowie ein Vielfaches von 7 oder 13, kann man auch bei der zu machenden Addition vernachlässigen oder bei der Subtraction zum Minuend hinzufügen, wenn diese sich nicht sollte machen lassen. Beispiel. 1 678 132 : 7

	132	133		833	155 : 7. Rest = 1.
	1	678		678	
	133	macht sich nicht		155	
		132	133	833	232 : 7. Rest = 1.
oder abgekürzt		1	601 , oder	601	
		133		232.	

Zu beweisen.

24. Um den Rest einer Division durch 7 zu finden, kann man auch in folgender Weise verfahren. Man schreibt in eine Columne die erste und dritte Gruppe, in eine andere die zweite und vierte, schreibt dann die Ziffern auf der Zehnerstelle 3 mal und die auf der Stelle der Hunderte 2 mal an. Man kann alsdann a) in jeder Columne 7 oder Ziffern, die zusammen 7 oder ein Vielfaches von 7 geben, streichen b) gleiche Ziffern oder Ziffernsummen, die in beiden Columnen vorkommen, in beiden streichen. Darnach zieht man die Ziffernsumme der zweiten Columne von der der ersten ab; macht diese Subtraction durch Hinzufügung von 7 oder eines Vielf. von 7 möglich, im Falle, wo sie sich nicht machen ließe; die Differenz gibt, wenn man sie durch 7 dividirt denselben Rest, wie die erste Zahl. Beispiel 23 452 789 137

789	137
23	452

Streicht man die 7, so gibt das

89	130
23	452

Dann nach obiger Regel

89	130
23	452
8	13
2	45
8	3
2	5

Streicht man nun auf beiden Seiten gleiche Summen, so bleibt 0—6 oder vielmehr 7—6=1 Rest.

25. Wenn es heute Montag ist, was ist es für ein Wochentag nach 2375 Tagen?

26. (148) Dividirt man eine Zahl durch 6, so bleibt 5 übrig; wieviel bleibt übrig, wenn man sie durch 2, und durch 3 dividirt?

27. (149) Dividirt man eine Zahl durch 12, so bleibt 8 übrig; wieviel bleibt übrig, wenn man sie durch 2, 6, 3, 4 dividirt?

28. Welcher Rest kann übrig bleiben, wenn man eine durch 3, oder eine durch 4 theilbare Zahl durch 12 dividirt?

29. Eine Zahl läßt 1 übrig, wenn man sie durch 3, und 2 übrig, wenn man sie durch 4 dividirt. Welchen Rest läßt dieselbe, wenn man sie durch 12 dividirt?

30. Wie kann man den Rest erkennen, den die Division einer ganzen Zahl durch 6, oder durch 12 läßt?

31. Welche Zahlen sind durch 14, 15, 18, 21, 22, 24, theilbar?

32. Man zerlege in Primfactoren 9450; 1008; 11340; 866970; 660 660; 18 781 308; 200 866 050.

33. Man suche den größten gemeinschaftlichen Theiler und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von folgenden Zahlen.

1) 9, 15, 25, 45, 75.
2) 70, 105, 350, 385.
3) 286, 1001, 1430.
4) 288, 1008, 1440, 1584.
5) 2520, 3024, 5544, 10080.
6) 346788, 173394, 1907334.

Rechnungen,
bei welchen mehrere der vier Rechnungsarten in Anwendung kommen.

150. Wie wir gesehen haben, ist eine Größe bestimmt, wenn sie die Summe oder die Differenz oder das Product oder der Quotient bekannter Größen ist; eine Größe kann aber auch durch andere Angaben vollkommen bestimmt sein. Wenn eine solche Größe sich mit Hilfe der vier Rechnungsarten berechnen läßt, so gehört ihre Ausrechnung noch der elementaren Arithmetik an. Bei der Lösung einer derartigen Aufgabe muß man vor Allem suchen, die verschiedenen Bestimmungen, welche das Verhältniß der bekannten Größen oder Zahlen zu einander und zu der zu bestimmenden Größe, d. i. der unbekannten Zahl, ausdrücken, gut zu verstehen und klar aufzufassen, dann die Aufgabe auf eine einfachere Aufgabe, diese nöthigenfalls wieder auf eine noch einfachere zurückzuführen, u. s. w. Die klare Auffassung der Verhältnisse der bekannten Zahlen zu der unbekannten zeigt oft, wie man die Angaben in einer andern gleichbedeutenden, aber für die Rechnungen bequemern Weise ausdrücken kann. Das Zurückführen der Aufgabe auf eine leichtere Aufgabe geschieht durch Bestimmung anderer Größen, deren Ausdruck man Hilfszahlen nennen könnte, und vermittelst welcher sich die zu bestimmende Größe leichter berechnen läßt. Es seien z. B. folgende Aufgaben zu lösen.

151. Aufgabe 1. Welche sind die zwei Zahlen, deren Summe 30 und deren Unterschied 11 beträgt?

Auflösung. 1. Die klare Auffassung der Angaben zeigt, daß man dieselben auch folgendermaßen ausdrücken kann. Die größere Zahl + die kleinere Zahl beträgt 30. Die größere Zahl — die kleinere Zahl beträgt 8. Man sieht nun leicht, daß die Addition von 30 und 8 eine Hilfszahl gibt, welche enthält die größere Zahl + die kleinere + die größere — die kleinere, oder 30+8= das Doppelte der größern Zahl. Auf diese Weise ist die Aufgabe auf eine leichtere zurückgeführt. Ist das Doppelte der größeren 30+8=38, so ist diese $\frac{30+8}{2}=19$. Ist die größere $\frac{30+8}{2}$ oder 19, und die Differenz ist 8, so ist die kleinere $\frac{30+8}{2}-8=\frac{30-8}{2}=11$.

Auflösung 2. Wären die beiden Zahlen, deren Summe 30 beträgt, einander gleich, so wäre jede 15. So oft man 1 von der einen wegnimmt und zu der andern hinzufügt, wird die Differenz um 2 größer, während die Summe dieselbe bleibt. Die Aufgabe ist mithin auf die einfachere Aufgabe zurückgeführt: Jedesmal wenn man 1 von der einen Zahl wegnimmt und zu der andern hinzufügt wird die Differenz, welche zuerst null ist, um 2 Einheiten größer; wie oft muß man dieß thun, daß sie um 8 Einheiten größer werde. Antwort: 4 mal. Die kleinere Zahl ist also $15-1\times4=11$ und die größere $15+1\times4=19$.

Auflösung 3. Bei klarer Auffassung der Angaben sieht man leicht, daß sich die Aufgabe in folgende anschaulichere verwandeln läßt: Peter und Paul sollen zusammen 30 Franken theilen, so daß Peter 8 mehr erhalte als Paul. Peter nehme also 8 vorab und nehme von den übrigen so viel als Paul. Peter erhält also $8+{}^{22}/_{2}=19$, und Paul ${}^{22}/_{2}=11$.

Anmerkung. Hat man mehrere ähnliche Aufgaben zu lösen, so kann man sich eine allgemeine Regel suchen. Man findet diese am leichtesten, wenn man die zu machenden Rechnungen bloß andeutet, ohne sie auszurechnen, wie in Aufl. 1, und dann prüft, ob diese angedeuteten Rechnungen für alle Zahlen dieselben wären. Für unsern Fall lautet die Regel: Kennt man die Summe und die Differenz zweier Zahlen, so ist die größere die Hälfte von dem, was man findet, wenn man Summe und Differenz addirt, und die kleinere die Hälfte von dem, was man findet, wenn man die Differenz von der Summe abzieht.

152. **Aufgabe 2.** Ein Wasserbecken erhält Zufluß aus drei Röhren: die erste allein würde es in 26 Stunden, die zweite in 39, die dritte in 52 Stunden füllen. In wieviel Zeit füllen sie es, wenn sie zusammen fließen.

Auflösung. Diese Angaben kann man auch folgendermaßen ausdrücken. Die erste Röhre füllt in einer Stunde $^1/_{26}$ des Beckens, die zweite $^1/_{39}$, die dritte $^1/_{52}$. Alle drei füllen in einer Stunde $^1/_{26} + ^1/_{39} + ^1/_{52} = ^6/_{156} + ^4/_{156} + ^3/_{156} = ^{13}/_{156} = ^1/_{12}$ des Beckens. Um $^1/_{12}$ des Beckens zu füllen brauchen sie 1 Stunde, und um $^{12}/_{12}$ desselben zu füllen 12 Stunden.

153. Da die Größen durch unzählige verschiedenartige Angaben bestimmt werden können, so lassen sich für das Ausrechnen derselben keine allgemeine Regeln aufstellen. Wir begnügen uns darum, an Beispielen zu zeigen, wie man die Aufgaben, welche am häufigsten im gewöhnlichen Leben und namentlich im Handel vorkommen, auflösen kann.

Einfache Regel-de-Tri.

154. Bei der **Regel-de-Tri** zieht man von einer Zahl einen Schluß auf die Einheit, und von der Einheit einen

Schluß auf eine andere Zahl. Wird die Zahl, welche man sucht, soviel mal kleiner oder größer, als die entsprechende bekannte Zahl kleiner oder größer wird, so geschieht der Schluß von der bekannten Zahl auf die Einheit durch eine Division, und der Schluß von der Einheit auf die andere bekannte Zahl durch eine Multiplication und die Rechnung heißt eine **directe** Regel-de-Tri; wird die unbekannte Zahl so viel mal größer oder kleiner, als die bekannte Zahl kleiner oder größer wird, so geschieht der erste Schluß durch eine Multiplication und der zweite durch eine Division, und die Rechnung heißt eine **indirecte** oder **umgekehrte** Regel-de-Tri.

155. **Aufgabe 1. Directe Regel-de-Tri.** 10 Arbeiter mähen in einer Woche 6 Hektares Wiese; wieviel hätten 8 Arbeiter unter denselben Umständen gemäht?

Auflösung. 10 Arbeiter mähen Hektares 3. Daraus folgt, daß unter denselben Umständen

1 Arbeiter mäht Hekt. $3 : 5 = \frac{3}{5}$.

8 Arbeiter hätten gemäht Hekt. $\frac{3}{5} \times 8 = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$

156. **Aufgabe 2. Umgekehrte Regel-de-Tri.** Um eine Wiese zu mähen, brauchen 10 Arbeiter 6 Tage; wieviel Tage hätten 8 Arbeiter gebraucht?

Auflösung. 10 Arbeiter brauchen Tage 6.
Also 1 Arbeiter braucht für dieselbe Arbeit T. 6×10.
Und 8 A. brauchen f. d. Arb. T. $6 \times 10 : 8 = \frac{6 \times 10}{8} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$

157. **Aufgabe 3. Directe Regel-de-Tri mit Dezimalen.** $14^{M.}, 25$ kosten $15^{Fr.}, 80$; was kosten $11^{M.}, 4$ von demselben Zeug?

Auflös. 1. $14^{M.}, 25$ kosten Fr. 15,80.

Also $0^{M.}, 01$ kostet Fr. $15{,}80 : 1425 = \frac{1580}{100 \times 1425}$;

und $1^{M.}$ kostet Fr. $\frac{1580}{100 \times 1425} \times 100 = \frac{1580}{1425}$;

$0^{M.}, 1$ kostet Fr. $\frac{1580}{1425} : 10 = \frac{1580}{1425 \times 10}$;

$11^{M.}, 4$ kosten Fr. $\frac{1580}{1425 \times 10} \times 114 = \frac{1580 \times 114}{1425 \times 10}$

$= \frac{158 \times 114}{1425} = \frac{158 \times 38}{475} = \frac{158 \times 2}{25} = \frac{316}{25} = 12^{Fr.}, 64.$

Anmerkung. Von dem Preise eines Centimeters hätte man auch unmittelbar einen Schluß auf den des Decimeters ziehen können; statt des dritten und vierten Schlusses hätte man alsdann gesetzt.

$0^{M.}, 1$ kostet Fr. $\frac{1550}{100 \times 1425} \times 10 = \frac{1580}{10 \times 1425.}$

Auflösung 2. $14^{M.}, 25$ kosten Fr. 15,80.

Also $1^{M.}$ „ kostet Fr. $15{,}80 : 14{,}25 = \frac{1580}{1\,425}$;

und $11^{M.}, 4$ kosten Fr. $\frac{1580}{1425} \times \frac{114}{10} = \frac{1580 \times 114}{1425 \times 10}$

$= 12^{Fr.}, 64.$

Anmerkung. Nach Nr. 117 hätte man auch schreiben können

14 M., 25 kosten 15,80.

1 M., kostet $15{,}80 : 14{,}25 = \frac{15{,}80}{14{,}25}$

11 M.,4 kosten $\frac{15{,}80}{14{,}25} \times 11{,}4 = \frac{15{,}80 \times 11{,}4}{14{,}25} = 12^{Fr.}, 64.$

158. **Aufgabe 4. Umgekehrte Regel-de-Tri mit Brüchen.** Wenn ich für mein Geld $14^1/_4$ Meter Tuch kaufen will, so erhalte ich Tuch von $15^4/_5$ Franken; wie theueres Tuch kann ich kaufen, wenn ich nur $11^2/_5$ haben will?

Auflösung 1. Will ich für mein Geld $14^1/_4 = {}^{57}/_4$ Meter kaufen, so erhalte ich Tuch von $15^4/_5 = {}^{79}/_5$ Franken. Will ich nur $^1/_4$ M. kauf., s. e. i. T. v. Fr. $\frac{79}{5} \times 57 = \frac{79 \times 57}{5}$

Will ich $1 = \frac{4}{4}$ M. k., s. e. i. T. v. Fr. $\frac{79 \times 57}{5} : 4 = \frac{79 \times 57}{5 \times 4}$

— $\frac{1}{5}$ . . . . $\frac{79 \times 57}{5 \times 4} \times 5 = \frac{79 \times 57 \times 5}{5 \times 4}$

— $11\frac{2}{5} = \frac{57}{5}$ . . . . . . $\frac{79 \times 57 \times 5}{5 \times 4} : 57 =$

$\frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$.

Weniger zu empfehlen ist folgendes Verfahren, wobei man die entsprechenden Zahlen unter gleiche Benennung bringt.

Auflösung 2.

Will ich $11\frac{1}{4} = 14\frac{5}{20} = \frac{285}{20}$ M. k., s. e. i. T. v. Fr. $15\frac{4}{5} = \frac{79}{4}$

. . . $\frac{1}{20}$ . . . . $\frac{79}{5} \times 285 = \frac{79 \times 285}{5}$

. . . $11\frac{2}{5} = 11\frac{8}{20} = \frac{228}{20}$ . . . . . $\frac{79 \times 285}{5} : 228 =$

$\frac{79 \times 285}{5 \times 228} = \frac{79 \times 57}{228} = \frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$.

Da zufällig die Zähler der entsprechenden Zahlen einander gleich sind, wäre am einfachsten gewesen folgende

Aufl. 3. Will ich $14\frac{1}{4} = \frac{57}{4}$ M. k., s. e. i. T. v. Fr. $\frac{79}{4}$

. . . . 57 . . . . $\frac{79}{5} : 4 = \frac{79}{4 \times 5}$

. . . . $11\frac{2}{5} = \frac{57}{5}$ . . . . $\frac{79}{4 \times 5} \times 5 =$

$\frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$.

Im Allgemeinen ist folgendes Verfahren das einfachste:

Aufl. 4. Will ich $\frac{57}{4}$ M. k., so e. ich T. v. Fr. $\frac{79}{5}$

. . . . 1 . . . . $\frac{79}{5} \times \frac{57}{4} = \frac{79 \times 57}{5 \times 4}$

. . . . $\frac{57}{5}$ . . . . $\frac{79 \times 57}{5 \times 4} : \frac{57}{5} =$

$\frac{79 \times 57 \times 5}{5 \times 4 \times 57} = \frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$.

Auflösung 5. Wenn ich für mein Geld $57/4$ Meter von $79/5$ Franken erhalte, so habe ich $\frac{79}{5} \times \frac{57}{4} = \frac{79 \times 57}{5 \times 4}$ Franken und wenn ich dafür $\frac{57}{5}$ Meter kaufe, so kostet 1 Meter $\frac{79 \times 57}{5 \times 4} : \frac{57}{5} = \frac{79 \times 57 \times 5}{5 \times 4 \times 57} = \frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$ Franken.

159. Es versteht sich fast von selbst, daß man gewöhnlich an den durch die verschiedenen Schlüsse gefundenen Resultaten die Multiplicationen und Divisionen unmittelbar vornimmt, ohne diese Resultate erst wieder abzuschreiben.

Auch verwandelt man während der Rechnung diese Resultate, wenn sie unächte Brüche sind, nicht in gemischte Zahlen, weil diese beim Rechnen weniger bequem sind. Die angezeigten Multiplicationen rechnet man ebenfalls erst aus, wenn man das Endresultat gefunden hat, weil man durch Vereinfachungen, die später möglich werden, häufig diese Multiplicationen erspart, und weil das Vereinfachen der Brüche, deren Zähler und Nenner aus bloß angezeigten Producten bestehen, sich sogar leichter macht, als mit ausgerechneten Producten.

Diese Bemerkungen gelten auch für andere Aufgaben.

160. Aufgabe 5. Regel-de-Tri mit gemischten Zahlen. 5 Pfund 6 Loth Zollvereinsgewicht kosten 6 Thlr. 16 Sgr. 8 Pfennig; was kosten 9 Pfund 22 Loth 15 Quentchen?

Auflösung 1. Man verwandelt die entsprechenden gemischten Zahlen in Maßeinheiten der niedrigsten Ordnung. 1 ℔ Zollvereinsgewicht = 30 Loth. 1 Loth = 10 Quentchen.

1560 Qt. kosten 6 Thlr. 16 Sgr. 8 Pf.

$$1 \text{ Qt. kostet } \frac{6 \text{ Thlr. } 16 \text{ Sgr. } 8 \text{ Pf.}}{1560}$$

$$2925 \text{ Qt. kosten } \frac{(6 \text{ Thlr. } 16 \text{ Sgr. } 8 \text{ Pf.}) \times 2925}{1560} =$$

$$\frac{(6 \text{ Thlr. } 16 \text{ Sgr. } 8 \text{ Pf.}) \times 15}{8} = (3/4 \text{ Thlr. } 2 \text{ Sgr. } 1 \text{ Pf.}) \times 15 =$$

12 Thlr. 8 Sgr. 9 Pf.

Auflösung 2. Man kann auch die entsprechenden gemischten Zahlen in Brüche von Maßeinheiten der höchsten Ordnung verwandeln $5\frac{1}{5} = \frac{26}{5}$ ℔ kosten 6 Thlr. 16 Sgr. 8 Pf.

1 ℔ kostet $\frac{(6 \text{ Thlr. } 16 \text{ Sgr. } 8 \text{ Pf.}) \times 5}{26}$

$9\frac{3}{4} = \frac{39}{4}$ ℔ kosten $\frac{(6 \text{ Thlr. } 16 \text{ Sgr. } 8 \text{ Pf.}) \times 5 \times 39}{26 \times 4} =$ 12 Thlr. 8 Sgr. 9 Pf.

Auflösung 3. Häufig lassen sich auch die entsprechenden gemischten Zahlen in Dezimalbrüche von Maßeinheiten der höchsten Ordnung verwandeln.

5,2 ℔ kosten 6 Thlr. 16 Sgr. 8 Pf.

1 ℔ kostet $\frac{(6 \text{ Thlr. } 16 \text{ Sgr. } 8 \text{ Pf.}) \times 10}{52}$

9,75 ℔ kosten $\frac{(6 \text{ Thlr. } 16 \text{ Sgr. } 8 \text{ Pf.}) \times 10 \times 975}{52 \times 100} =$ 12 Thlr. 8 Sgr. 9 Pf.

Aufgaben.

1. Ein Landmann hat 75 Hektoliter Kalk verbraucht um 1 Hektare Ackerland zu verbessern. Diese Verbesserung war auf 15 Jahre berechnet. Wieviel Kalk müßte man demnach für 1 Are Ackerland nehmen, wenn die Verbesserung nach 9 Jahren wiederholt werden sollte?

2. Auf 12 Gegenständen gewinnt der Arbeiter, welcher sie fabrizirt 15 Franken; wieviel gewinnt er auf 100?

3. Ein senkrechter Stock von 8 Fuß gibt 11 Fuß Schatten; ein Kirchthurm wirft zur selben Zeit einen Schatten, der, von dem senkrechten Fuße des Kreuzes an gerechnet, 198 Fuß lang ist. Wie hoch ist der Thurm?

4. Gibt man täglich jedem Soldaten einer Festung 10 Sous, so kommt man 26 Tage aus; man will aber 65 Tage auskommen, wieviel kann man täglich jedem Soldaten bezahlen?

5. Was kostet ein Meter, wenn die Elle $1\frac{1}{2}$ Thaler kostet?

6. Ein Kaufmann verkauft zu 30 Gulden, was er zu 27 Gulden

einkauft. Wieviel gewinnt er auf den Waaren a) die er für 100 Gulden kauft b) die er für 100 Gulden verkauft?

7. Um ein Zimmer zu tapezieren braucht man 12 Rollen Papier, das 1 Fuß 9 Zoll breit ist; wieviel Rollen von derselben Länge braucht man, wenn das Papier 1 Fuß 6 Zoll breit ist?

8. Wie verhält sich die Dichtigkeit der Bevölkerung der Rheinprovinz, Westphalens, Pommerns, Böhmens zu der von Luxemburg d. h. wieviel Einwohner leben in der Rheinprovinz ꝛc. auf demselben Raume, auf dem im Großherzogthum Luxemburg 1 Einwohner lebt.

9. Beim Gefrierpunkte des Wassers zeigt das Thermometer (Wärmemesser) Réaumur 0° (0 Grad), das Thermometer Centigrade ebenfalls 0°, und das Thermometer Fahrenheit 32°. Beim Siedepunkt des Wassers zeigt das Thermometer Réaum. 80°, das Therm. Centigr. 100°, das Therm. Fahrenh. 212°.

a) Wieviel steigt das Thermometer Centigrade und Fahrenheit, wenn das Thermometer Réaumur um 4° steigt?

b) Wieviel Grad ist es auf dem Thermometer Centigrade und Fahrenheit, wenn das Thermometer Réaumur auf 8° ist?

c) Wieviel Grad zeigt das Thermometer Réaumur und Fahrenheit, wenn das Thermometer Centigrade auf 25 steht?

d) Wieviel Grad zeigt das Thermometer Réaumur und Centigrade, wenn das Thermometer Fahrenheit auf 110° steht?

e) Wieviel Grad unter 0, wenn das Thermometer Fahrenheit auf 0° steht?

10. Der mittlere Durchmesser der Erde beträgt 6 366 635 Meter. Wie hoch müßte sich über der glatten Oberfläche eines Erdglobus von 1 M, 50 Durchmesser, auf welchem man die Erhöhungen und Vertiefungen über dem Meeresspiegel nachahmen wollte, die höchsten Punkte der Erde, a) der Mount Everest, welcher 8 770 Meter und b) der Dhawalagiri, welcher 8 456 Meter hoch ist, erheben? c) Wie tief unter dieser glatten Oberfläche müßte die bedeutendste Einsenkung auf der Erdoberfläche, der Spiegel des todten Meeres, welcher 420 Meter unter dem Meeresniveau liegt, einsinken?

11. Wenn auf einem exacten Erdglobus der Durchmesser des Äquators (der größte) 3 Meter betrüge, wie groß müßte der kleinste sein, welcher durch die Polen geht? Der erste beträgt auf der Erde 6 377 398, dieser 6 356 079 Meter.

12. Ein Kornhändler kauft eine Roggenerndte zu 19 Fr., 44 die 400 Kilogr. und bezahlt dafür im Ganzen 1500 Fr. Ein Hektoliter wiegt 72 Kilogr.; wieviel Hektol. hat er erhalten?

13. Wenn 100 Kilogr. Gerste 17 Fr., 74 kosten, und 1 Hektoliter 62 Kilogr. wiegt, was kosten 25 Hektoliter?

14. Ein Kleefeld von 70 Ares wurde in 3 Stunden 25 Minuten eingesäet; wieviel Zeit ist erfordert, um 3 Hekt. 80 Ares einzusäen?

15. Ein Acker von 75 Ares hat 15 Hektoliter Waizen hervorgebracht; wieviel erhielte man demnach auf einem Acker von gleicher Beschaffenheit, welcher 1 Hekt. 25 Ares 10 Centiares mißt?

16. Man will 40 Ellen Tuch das $^5/_4$ Elle breit ist, mit Leinwand füttern, die $^2/_3$ Elle breit ist. Wieviel Leinwand ist dazu erfordert?

17. Tuch, das $^5/_6$ Elle breit ist, kostet 15,50 Franken die Elle; anderes von derselben Güte ist $^5/_4$ Elle breit und kostet 15 Franken. Welches ist wohlfeiler, und wieviel müßte das erste nach dem zweiten und das zweite nach dem ersten Preise mehr oder weniger kosten?

18. Was kosten 12 Fuß 5 Zoll, wenn man 2 Thlr. 2 Sgr. 6 Pf. bezahlt für 8 Fuß 4 Zoll?

19. Wenn man an einem Ort $80^1/_2$ Thaler gibt für 300 Franken; wieviel Franken erhält man für $24^2/_3$ Thaler?

20. Jemand gibt täglich $4^1/_2$ Thaler aus und reicht mit seinem Gelde 15 Tage; wie lange kommt er aus, wenn er täglich nur $3^3/_4$ Thaler ausgibt?

21. Was kosten 24 ℔ 17 Lth., wenn 18 ℔ $7^3/_4$ Lth. 6 Thlr. 9 Sgr. 6 Pf. kosten?

22. 7 Centner 8 ℔ 9 Loth kosten 187 Thlr. 24 Sgr.; was kosten 96 ℔ 5 Loth?

23. Eine Uhr, welche in $4^1/_2$ Stunden regelmäßig 2 Minuten 15 Secunden vorgeht, ist um Mittag gerichtet worden; a) wieviel Uhr wird sie zeigen um halb zwei, b) wie spät wird es sein, wenn sie 9 Uhr $2^1/_2$ Minute zeigt?

24. a) Hätte ich für dieselbe Summe, welche ich für $11^2/_5$ Meter von $19^3/_4$ Fr. bezahlt habe, $14^1/_4$ Meter gekauft, wie theuer hätte ich alsdann den Meter bezahlt? b) Wieviel Tuch von $15^4/_5$ Fr. den Meter erhalte ich für die Summe, welche ich bezahlen muß für $11^2/_5$ Meter von $19^3/_4$ Fr.? c) Wieviel Tuch von $19^3/_4$ Fr. den Meter erhalte ich für die Summe, welche ich bezahlen muß für $14^1/_4$ Meter

von $15\frac{4}{5}$ Fr.? Wie dienen diese Aufgaben sich gegenseitig zur Probe und zur Probe der Aufgabe von Nr. 158?

25. Man stelle drei Aufgaben auf, welche in ähnlicher Weise zur Probe der Aufgabe von Nr. 155 dienen?

Zusammengesetzte Regel-de-Tri.

161. Man nennt **zusammengesetzte Regel-de-Tri** die Auflösung einer Aufgabe vermittelst zwei oder mehrer Regel-de-Tri.

162. Zusammengesetzte Regel-de-Tri **mit ganzen Zahlen. Aufgabe.** 20 Arbeiter, die täglich 9 Stunden arbeiten, brauchen 12 Tage, um einen Graben von 40 Meter Länge, 4 Meter Breite und 6 Meter Tiefe auszugraben; wieviel Arbeiter muß man unter übrigens gleichen Umständen nehmen, wenn in 18 Tagen bei 10stündiger täglichen Arbeit ein Graben von 100 Meter Länge, 3 Meter Breite und 4 Meter Tiefe ausgegraben werden soll.

Auflösung. **1.** Zur Uebersicht wollen wir uns die einander entsprechenden Angaben in folgender abgekürzten Weise anschreiben.

	Stunden.	Tage.	L. M.	B. M.	T. M.	Arbeiter.
	9	12	40	4	6	20
	10	18	100	3	4	
a[1])	9 —	12 —	40 —	4 —	6 —	20
b)	1 —	12 —	40 —	4 —	6 —	20×9
c)	10 —	12 —	40 —	4 —	6 —	$\frac{20 \times 9}{10}$
d)	10 —	1 —	40 —	4 —	6 —	$\frac{20 \times 9 \times 12}{10}$

[1]) Man lese dieses: Wenn täglich 9 Stunden gearbeitet wird, wenn die Arbeit in 12 Tagen fertig werden, und der Graben 40 Meter lang, 4 Meter breit und 6 Meter tief werden soll, so braucht man 20 Arbeiter; die folgenden Sätze lese man in ähnlicher Weise.

e) 10 — 18 — 40 — 4 — 6 — $\frac{20\times9\times12}{10\times18}$

f) 10 — 18 — 1 — 4 — 6 — $\frac{20\times9\times12}{10\times18\times40}$

g) 10 — 18 — 100 — 4 — 6 — $\frac{20\times9\times12\times100}{10\times18\times40}$

h) 10 — 18 — 100 — 1 — 6 — $\frac{20\times9\times12\times100}{10\times18\times40\times4}$

i) 10 — 18 — 100 — 3 — 6 — $\frac{20\times9\times12\times100\times3}{10\times18\times40\times4}$

k) 10 — 18 — 100 — 3 — 1 — $\frac{20\times9\times12\times100\times3}{10\times18\times40\times4\times6}$

l) 10 — 18 — 100 — 3 — 4 — $\frac{20\times9\times12\times100\times3\times4}{10\times18\times40\times4\times6}=15.$

Anmerkung 1. a enthält den ersten Ansatz; b und c bilden die erste Regel-de-Tri; d und e die zweite; f und g die dritte; h und i die vierte; k und l die fünfte, und l enthält die Lösung der Aufgabe.

Anmerkung 2. Der Schluß f gibt als Resultat $^3/_{10}$ Arbeiter. Dieser Ausdruck läßt sich leicht erklären; er will sagen 1 Taglöhner, der nur $^3/_{10}$ von dem leistet, was täglich einer der andern Arbeiter verrichtet.

Auflösung 2. 20 Arbeiter, die während 12 Tagen, täglich 9 Stunden arbeiten, verrichten ein Werk von $9\times12\times20$ Stunden Arbeit.

Arbeiter, die während 18 Tagen, täglich 10 Stunden arbeiten, arbeiten jeder 180 Stunden.

Ein Graben, der 40 Meter tief ist, 4 Meter breit und 6 Meter tief, ist ein Graben von $40\times4\times6$ Kubikmeter. (79)

Ein Graben, der 100 Meter lang, 3 Meter breit und 4 Meter tief ist, ist ein Graben von $100\times3\times4$ Kubikmeter.

Zu $40\times4\times6$ Kubikm. sind erfordert $9\times12\times20$ Stunden.

Zu 1 — ist — $\frac{9\times12\times20}{40\times4\times6}$ —

Zu $100\times3\times4$ Kubikm. sind erfordert $\frac{9\times12\times20\times110\times3\times4}{40\times4\times6}$ St.

Und, wenn 1 Arbeiter 18×10 Stunden arbeitet, so sind dazu erfordert $\frac{9\times12\times20\times100\times3\times4}{40\times4\times6\times18\times10}=15$ Arbeiter.

163. Zusammengesetzte Regel-de-Tri **mit Dezimalen und Brüchen. Aufgabe.** Man hat zu einem Kleidungsstücke Tuch genommen, das 1M., 25 breit war, und wovon der Meter 9Fr.,50 kostete; ein andermal wählt man für 3 ähnliche Kleider Tuch, das $1\frac{1}{2}$ Elle breit ist, und wovon die Elle $6\frac{3}{4}$ Franken kostet. Das erste Tuch kostet 23Fr.,75; wieviel wird das Tuch für die drei andern Kleider kosten?

Angaben.

Breite des Tuches. Meter.	Preis des Meters. Franken.	Zahl der Kleider.	Preis der Kleider. Franken.
1,25	9,50	1	23,75
$1\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{10}$	$6\frac{3}{4}\times\frac{5}{3}=\frac{45}{4}$	3	

Auflösung 1.

1,25[1] —	9,50 —	1 —	23,75
0,01 —	9,50 —	1 —	$\frac{2375\times125}{100}$
$0,1=\frac{1}{10}$ —	9,50 —	1 —	$\frac{2375\times125}{100\times10}$
$\frac{9}{10}$ —	9,50 —	1 —	$\frac{2375\times125}{100\times10\times9}$
$\frac{9}{10}$ —	0,01 —	1 —	$\frac{2375\times125}{100\times10\times9\times950}$
$\frac{9}{10}$ —	1 —	1 —	$\frac{2375\times125\times100}{100\times10\times9\times950}$
$\frac{9}{10}$ —	$\frac{1}{4}$ —	1 —	$\frac{2375\times125\times100}{100\times10\times9\times950\times4}$
$\frac{9}{10}$ —	$\frac{45}{4}$ —	1 —	$\frac{2375\times125\times100\times45}{100\times10\times9\times950\times4}$
$\frac{9}{10}$ —	$\frac{45}{4}$ —	3 —	$\frac{2375\times125\times100\times45\times3}{100\times10\times9\times950\times4}=117$ Fr.

[1]) Man lese dieses: Ist das Tuch 125 Centimeter breit, und kostet der Meter 9Fr., 50, so kostet 1 Kleid 23Fr., 75.

Auflösung 2.

1,25	9,50	1	23 75
1	9,50	1	$23{,}75 \times 1{,}25 = \frac{2375 \times 125}{10000}$
$\frac{9}{10}$	9,50	1	$\frac{2375 \times 125 \times 10}{10000 \times 9}$
$\frac{9}{10}$	1	1	$\frac{2375 \times 125 \times 10 \times 100}{10000 \times 9 \times 950}$
$\frac{9}{10}$	$\frac{45}{4}$	1	$\frac{2375 \times 125 \times 10 \times 100 \times 45}{10000 \times 9 \times 950 \times 4}$
$\frac{9}{10}$	$\frac{45}{4}$	3	$\frac{2375 \times 125 \times 10 \times 100 \times 45 \times 3}{10000 \times 9 \times 950 \times 4}$

$$= 117\frac{3}{16}$$

Aufgaben.

1. Wieviel Heu braucht man, um 20 Pferde 10 Tage lang zu nähren, wenn man für 6 Pferde in 4 Tagen 120 Kilogramm braucht?

2. Wenn 5 Arbeiter bei 10stündiger täglichen Arbeit in 12 Tagen 360 Meter einer Arbeit machen, wieviel Meter werden 8 eben so tüchtige Arbeiter, die täglich 9 Stunden arbeiten, in 15 Tagen machen?

3. 24 Wagen fahren während 8 Tagen täglich 6 mal, um einen Schutthaufen wegzuräumen; wie lange hätten 18 Wagen, die täglich 4 mal fahren, damit zu thun?

4. 20 Arbeiter haben in 6 Tagen bei 12stündiger täglichen Arbeit 360 Meter einer Arbeit gemacht; wieviel Zeit brauchen 15 Arbeiter von derselben Stärke, um 160 Meter zu machen, wenn sie täglich nur 10 Stunden arbeiten?

5. Ein Landmann dingt 6 Taglöhner auf 170 Tage zu 1 Fr.,25 täglich. Die Arbeitszeit ist 10 Stunden täglich, 3 von den Taglöhnern arbeiten täglich 9 Stunden 35 Minuten; zwei derselben arbeiten täglich 8 Stunden 40 Minuten; einer nur hat sein Tagewerk treulich vollendet. Wieviel hat der Landmann verloren?

6. 250 Mann führen in 24 Tagen zu 11 Stunden eine Eisenbahnstrecke aus von 4400 Meter Länge und 7M,80 Breite; welche Strecke werden 400 Mann in 80 Tagen zu 12 Stunden fertig bekommen, wenn die Bahn nur 7M,15 breit ist?

7. Jemand leiht Geld aus und erhält für 100 Thaler der ausgeliehenen Summe auf 12 Monate eine Vergütung von $4^1/_2$ Thlr. wieviel erhält er, wenn er $3716^2/_3$ Thlr. 5 Monate ausleiht?

8. Jemand erhält für je 100 Franken einer ausgeliehenen Summe auf 360 Tage eine Vergütung von 3Fr.,50; wieviel erhält er, wenn er 376Fr.,75 auf 217 Tage ausleiht?

9. Wenn täglich ein Mann $1^3/_4$ ℔ Brod bekommt, reicht der Vorrath 45 Wochen 3 Tage für eine Besatzung von 9000 Mann; wenn die Besatzung um 2000 Mann verstärkt wird und der Vorrath 1 Jahr (52 Wochen 1 Tag) ausreichen soll, wieviel bekommt dann jeder täglich?

10. 9 ℔ Zwirn geben 35 Ellen Leinwand, die $1^1/_8$ Elle breit wird; wieviel Ellen geben 15 ℔, wenn die Leinwand $1^3/_4$ Elle breit werden soll?

11. Ein Fuhrmann erhält für die Fracht von $37^1/_2$ Centner, die er $5^1/_3$ Meile gefahren hat, $32^1/_2$ Thaler; a) wieviel bekommt er demnach für $23^5/_6$ Centner, die er $8^3/_4$ Meilen zu fahren hat? b) wie weit wird er für 13 Thlr. $26^2/_3$ Centner fahren? c) wieviel Centner wird er 12 Meilen weit für 17 Thaler 18 Silbergroschen fahren?

12. Eine Mauer von 36 Fuß Länge, 2 Fuß Dicke und 7 Fuß Höhe wird von 6 Maurern, welche täglich 12 Stunden arbeiten, in 2 Wochen aufgeführt; wie lange wird eine Mauer von $7^1/_2$ Fuß Höhe und $1^1/_2$ Fuß Dicke werden, an welcher 10 Arbeiter 3 Wochen lang täglich 10 Stunden arbeiten?

13. 5 Gesellen arbeiteten 7 Tage zu 10 Stunden und bringen 125 Stück einer Waare, welche 48 Ellen lang und 2 Ellen breit ist, fertig; wie lange werden 10 Gesellen und ein Lehrjunge, dessen Arbeit halb so hoch als die eines Gesellen angeschlagen wird, arbeiten müssen, um bei täglich 8stündiger Arbeit 160 Stück derselben Waare fertig zu bringen, wenn jedes Stück 36 Ellen lang und 3 Ellen breit werden soll?

14. Ein Kanal, welcher 700 Meter lang, 4Met.,15 tief und 7Met.,50 breit ist, wird von 150 Arbeitern, die täglich 10 Stunden arbeiten, in einem Jahr 235 Tagen vollendet. Ein anderer Kanal von 830 Meter Länge, 3Met.,75 Tiefe und 6Met.,30 Breite soll von 200 Arbeitern, welche täglich 9 Stunden arbeiten, ausgegraben werden. Im Vergleich mit der Arbeit am ersten Kanal, kann aber hier jeder Arbeiter im Durchschnitt nur $^9/_{10}$ fortschreiten. In wieviel Zeit wird der zweite Kanal fertig?

15. Wie ist Aufgabe, Nr. 162, zu berichtigen, wenn einer der letzten Arbeiter in derselben Zeit nur $^5/_6$ von dem leistet, was einer der ersten thut, wenn der Boden um $^1/_3$ größere Schwierigkeiten darbietet, und wenn man annimmt, daß die Ausgrabung des zweiten Meters $^4/_3$, die des 3ten $^5/_3$, des 4ten $^6/_3$, des 5ten $^7/_3$, des 6ten $^8/_3$ und des 7ten $^9/_3$ von der Zeit erfordert, die man für die Ausgrabung des ersten Meters nöthig hat?

Procent-Rechnung.

164. Wenn der Kaufmann A Waaren, die er für 200 Franken eingekauft hat, um 236 Franken verkauft, und der Kaufmann B Waaren, die er zu denselben Preisen für 120 Franken bezogen hat, um 145 Franken verkauft, so gewinnt A 36 und B 25 Franken. Daraus ersieht man aber nicht, wer von beiden billiger verkauft; um dieses zu erfahren muß man ausrechnen, wieviel Jeder auf 1 Franken oder überhaupt auf derselben Summe gewinnt. So fände man z. B. daß auf 1 Franken A $^{36}/_{200} = ^9/_{50}$ Franken, und B $^{25}/_{120} = ^5/_{24}$ Franken gewinnt, oder daß auf 25 Franken A $4^1/_2$ und B $5^5/_{24}$, oder daß auf 100 Franken A 18 und B $20^5/_6$ Franken gewinnt. Gewöhnlich nimmt man zu solchem Vergleiche nicht die Einheit, sondern das Hundert, mitunter auch das Tausend an und sagt dann, A verkaufe mit einem Gewinn von 18 Franken auf 100 Franken. Ein Gewinn von 18 Franken auf 100 Franken, ist aber ein Gewinn der 18 mal den 100sten Theil des Einkaufspreises beträgt;

man könnte also eben so gut sagen, A verkaufe mit einem Gewinne von 18 Centimes auf 100 Centimes, von 18 Sous auf 100 Sous, von 18 Thaler auf 100 Thaler u. s. w. Man pflegt darum allgemeiner zu sagen, A verkaufe mit einem Gewinn von **18 von 100**, oder von **18 Procent** [1]), oder von **18%**.

1, 7, ½ oder 3½ % einer Zahl ist demnach 1 mal, 7 mal, ½ mal oder 3½ das Hunderttel dieser Zahl. Ähnlich heißt 1 mal, 7 mal, ½ mal, 3½ mal das Tausendtel einer Zahl 1, 7, ½, 3½ **von tausend**, oder 1, 7, ½, 3½ **Promille**[2]), oder 1, 7, ½, 3½ ‰.

165. Man bedient sich dieses Ausdruckes namentlich, um die Vermehrung oder Verminderung, welche eine Summe Geldes, das Gewicht einer Waare oder andere Größen unter gewissen Umständen erleiden.

Bei den Procentrechnungen hat man es also mit vier Zahlen zu thun a) mit einer Größe A b) mit der Vermehrung oder Verminderung derselben M c) mit der Zahl P, welche ausdrückt, um wieviel % die erste Zahl vermehrt oder vermindert wird und d) mit der vermehrten oder verminderten Zahl B, und es können daher folgende sechs Aufgaben vorkommen: man kennt

1⁰ A und P, 2⁰ A und M, 3⁰ A und B, 4⁰ P und M, 5⁰ P und B und 6⁰ M und B und sucht die beiden andern Zahlen.

166. **Aufgabe 1.** Ein Kaufmann verkauft Waaren, die er für 950 Franken eingekauft hat, mit einem Gewinne

[1]) Vom lateinischen pro centum=für hundert.
[2]) Vom lateinischen pro mille=für tausend.

von 16%; wieviel wird er gewinnen, und aus den Waaren lösen?

Auflösung. Ein Gewinn von 16% ist ein Gewinn der 16 Hundertel des Einkaufspreises beträgt; im vorliegenden Falle ist derselbe $\frac{950\times16}{100}=152$ Franken. Sein Erlös beträgt demnach $950+152=1102$ Franken.

Oder: Auf 100 Franken gewinnt er 16 Fr.

auf 1 — $\frac{16}{100}$ Fr.

auf 950 — $\frac{16\times950}{100}=125$ Fr.

Sein Erlös ist demnach $950+152=1102$.

Oder: Was er für 100 Fr. einkauft, verkauft er für 116 Fr.; — 1 — — $\frac{116}{100}$ Fr.; — 950 — — $\frac{116\times950}{100}$ Fr. $=1102$ Fr. Mithin beträgt sein Gewinn $1102-950=152$ Fr.

Anmerkung. Die erste Auflösung ist die einfachste, wenn man den Gewinn suchen, die letzte die einfachste, wenn man bloß den Erlös ausrechnen will.

167. Aufgabe 2. Ein Kaufmann verliert bei einem Handel 118Fr.,50 auf 1580 Franken; wieviel Procent beträgt sein Verlust, und wieviel rettet er von seinem Gelde?

Auflösung! Auf 1580 Fr. verliert er 118Fr.,50.

— 1 — $\frac{118,50}{1580}$

— 100 — $\frac{11850}{1580}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$.

Er verliert also $7\frac{1}{2}$ % von seinem Gelde, und behält $1580-118$Fr.,$50=1461$Fr.,50.

168. Aufgabe 3. 8199 Pfund von frischem Eichenholz

wiegt trocken 5408 Pfund; wieviel % von seinem Gewicht verliert das Eichenholz durch das Trocknen?

Auflösung. Auf 8199 Pfund verliert das Eichenholz 8199—5408=2791 Pfd.; auf 1 Pfd. verliert es $^{2791}/_{8199}$ und auf 100 Pfd. $^{279100}/_{8199}$.

169. Aufgabe 4. Wieviel ist eine Wiese werth, welche im Durchschnitt jährlich einen Reinertrag gibt von 50 Thlr., wenn man annimmt, daß sie $3^1/_3$ % ihres Werthes einbringe?

Auflösung. Brächte sie ein $^{10}/_3$ Thlr., so wäre sie werth 100 Thlr.

Brächte sie ein 1 Thlr., so wäre sie werth $\frac{100 \times 3}{10}$ Thlr.

Bringt sie ein 50 Thlr., so ist sie werth $\frac{100 \times 3 \times 50}{10} =$ 1500 Thlr.

170. Aufgabe 5. Welche Summe wird 77 Thlr. 12 Sgr., wenn man sie um $3^1/_4$ % vermindert?

Auflösung. Durch eine Verminderung von $3^1/_4$ % wird aus 100 Thlr. eine Summe von $96^3/_4 = ^{387}/_4$ Thlr. Wäre also die zweite Summe $\frac{387}{4}$ Thlr., so betrüge die erste 100 Thlr.; wäre die zweite 1 Thlr., so betrüge die erste $\frac{100 \times 4}{387}$ Thlr.; ist aber die zweite 77 Thlr. 12 Sgr. $= 77\frac{12}{30}$ Thlr. $= 77\frac{2}{5}$ Thlr. $= \frac{387}{5}$ Thlr., so ist die erste $\frac{100 \times 3 \times 387}{387 \times 5}$ $= 80$ Thlr.

171. Aufgabe 6. Ein Kaufmann löst aus seinen Waaren 408 Franken und gewinnt darauf 51 Fr.; wieviel % vom Einkaufspreise beträgt sein Gewinn?

Auflösung. Auf dem Einkaufspreise 408—51=357 Fr. gewinnt er 51 Fr.; auf 1 Fr. des Einkaufspreises gewinnt er $\frac{51}{357}$ Fr.; und auf 100 Fr. des Einkaufspreises $\frac{51 \times 100}{357} = \frac{100}{7}$ $= 14^2/_7$ Fr.

172. Um die 6procentige Vermehrung oder Verminderung von A zu finden, wenn man A kennt, setzt man an:

Auf 100 beträgt die Vermehrung oder Verminderung 6; wieviel beträgt sie auf A?

Um die 6procentige Vermehrung oder Verminderung von A zu finden, wenn man B, das um 6 % vermehrte oder verminderte A kennt, setzt man an:

Auf 106 betrug die Vermehrung 6; wieviel betrug sie auf B; oder

Auf 94 betrug die Verminderung 6; wieviel betrug sie auf B?

Man pflegt zu sagen, im ersten Falle suche man die **Procente von hundert von A**, im zweiten Falle suche man die **Procente auf hundert von B**, (oder die Procente von hundert von A), und im dritten Falle suche man die **Procente in hundert von B**, (oder die Procente von hundert von A).

173. Im kaufmännischen Verkehre kommt die Procentrechnung am häufigsten zur Anwendung bei Berechnung des Gewinnes oder Verlustes, der Spesen, der Tara, des Agio, des Tantième, der Assecuranzprämien, der Zinsen und des Rabattes.

174. Spesen [1]) heißen die Unkosten oder Auslagen, welche beim Waaren- und Wechselhandel vorkommen.

Die hauptsächlichsten sind: 1° die **Provision oder Commission**; darunter versteht man die Gebühren, welche ein Handelsmann, der einem andern einen Auftrag besorgt, für seine Mühe rechnet. Derjenige, welcher den Auftrag ertheilt, heißt Committent, und derjenige, welcher denselben erhält, Commissionär; dieser berechnet dem Committenten die Provi-

[1]) Von dem italienischen Worte spesa = Ausgabe.

sion nach % (1, 1½, 2 oder mehr %) von der Einkaufs- oder Verkaufssumme. Der Commissionär, welcher den Ein- oder Verkauf von Geld, Wechseln und andern Werthpapieren besorgt, heißt **Bankier**; seine Provision beträgt in der Regel nur ¼ bis ½ %. 2° das **Delcredere** [1]); darunter versteht man die Vergütung, welche dem Commissionär zuerkannt wird, wenn er für den Erlös der verkauften Commissionswaaren oder der besorgten Wechsel einsteht, so daß der Committent sich darum nicht zu kümmern braucht. 3° die **Courtage** [2]); die Gebühren des Courtiers (Mäklers) bei Einkauf und Verkauf von Waaren oder Wechseln. Bei Waaren rechnet man dafür ¼—1 %, welches der Verkäufer allein zu bezahlen hat; bei Wechseln wird sie meist nach ‰ berechnet, (häufig 1 ‰ für Käufer und Verkäufer). 4° die **Assecuranzprämie**. Vgl. Nr. 177. 5° die **Fracht**. 6° die **Speditionsprovision**, die Gebühren des Spediteurs. Spediteur ist derjenige, welcher für fremde Rechnung Güterversendungen besorgt. 7° die **Zölle**, welche gemäß dem **Zolltarif** entweder nach Procenten des declarirten Werthes der Waaren oder nach dem Gewichte derselben berechnet werden. Zu manchen Zöllen werden bestimmte Procente des Zollbetrages — ein **Additionalzoll** — hinzugerechnet.

175. Der **Rabatt**, **Discont**, **Sconto** oder **Decort** ist ein Abzug von dem Geldbetrage der Waare, der meist dem Käufer bewilligt wird, wenn er baar bezahlt, mitunter aber auch bei Käufen auf Zeit oder Credit (auf Borg) gewährt wird. Insoferne die Zeit dabei berücksichtigt wird, kommen wir später darauf zurück.

[1]) Von dem italienischen Worte **del credere** = für das Creditiren oder das Gutschreiben.

[2]) Von dem französischen Worte **courtier** = Mäkler.

176. Bei der Berechnung der Waaren finden an dem Gewichte derselben verschiedene Abzüge — **Gewichtsspesen** — statt, als 1) **Tara** (Ta), d. i. das Gewicht der Kisten, der Fässer, des Packtuches u. s. w., in welchen die Waaren verpackt werden. Das Gewicht der Waare mit der Verpackung (Emballage) heißt **Brutto** = (Btto) oder **Sporcogewicht** (Spco = unrein). Die Tara wird bestimmt, indem man die Verpackung wägt, oder usanzmäßig (nach kaufmännischen Gebräuchen) die Tara per Ballen, Faß, Kiste, Sack ꝛc. angibt, oder indem man sie nach % vom Bruttogewicht berechnet. Letzteres ist namentlich der Fall bei den Waaren, bei welchen es umständlich wäre, das Gewicht der Verpackung direct zu bestimmen. 2) **Gutgewicht** (Ggw.) ist ursprünglich ein Abzug für den Verlust beim Umpacken, Auswägen ꝛc. Der Ausschlag oder das stille Gutgewicht ist eine namentlich Kleinhändlern gewährte Vergütung für das kleine Uebergewicht, das diese oft veranlaßt sind ihren Käufern zu geben. 3) **Refacti** ist ein Abzug für schadhafte Theile einer Waare, welche, wenn sie noch zu gebrauchen sind, mit einem geringeren Preis bezahlt werden. 4) Außerdem wird wohl noch ein **Abschlag** für nicht verkäufliche Theile einer Waare gewährt, z. B. bei Rosinen für Stiele; oder eine Vergütung für Verluste gestattet, die beim Ausleeren der Kisten, Fässer ꝛc. (besonders bei Rohzucker) — **Besemschon** —, oder die bei Flüssigkeiten durch Auslaufen ꝛc. entstehen — **Leccage**.

Bei der Berechnung dieser Abzüge wird bei Waaren, die nicht kostbar sind, ein Bruch, der kleiner als ½ ℔ ist, vernachlässigt; ½ ℔ oder mehr für 1 ℔ angeschrieben. Das Gewicht, welches bleibt, nachdem man all' die vorkommenden Vergütungen vom Bruttogewicht abgezogen hat, heißt **Nettogewicht** (Ntto).

177. **Agio** oder **Aufgeld** heißt das, was eine bessere Münzsorte (z. B. 500 Fr. in Silber) mehr gilt als eine schlechtere von demselben Nennwerthe (z. B. 500 Fr. in Kupfer); es wird nach Procenten von der bessern Münzsorte berechnet (= Procente auf hundert nach der geringern). **Disagio** heißt das, was eine schlechtere Münzsorte weniger gilt (z. B. 1000 österr. Gulden in Papier) als eine bessere (z. B. 1000 österr. Gulden in klingender Münze); es wird nach Procenten von der schlechteren Münzsorte berechnet (= Procente in hundert nach der bessern).

178. **Tantième**[1] heißt der Antheil, der Jemanden, z. B. einem Commis, vom Reinertrage eines Geschäftes gewährt wird.

179. **Assecuranzprämie** heißt die Vergütung, welche ein Versicherter dem Versicherer bezahlen muß für die Verpflichtung, welche dieser übernimmt, gewisse Schäden, die den versicherten Gegenstand treffen können, zu vergüten.

[1]) Vom französischen Worte **tantième**=der sovielste Theil.

Aufgaben.

1. Wieviel beträgt die Tara und das Nettogewicht von

257 Zollcentner à 3 % Ta., à 4 % Ta., à 5 % Ta., à 6 % Ta.,
7215 ℔ — à 3 % Ta., à 4 % Ta., à 5 % Ta.; à 6 % Ta.,
5268 Kilogramm à 3 % Ta., à 4 % Ta., à 5 % Ta., à 6 % Ta.?

2. Wieviel beträgt der Erlös aus Waaren im Betrage von

1550 Fr.,75, welche verkauft werden mit a) $4\frac{1}{2}$ % b) $6\frac{3}{4}$ % Gewinn;
212 Thlr. 16 Sgr. — a) $4\frac{1}{2}$ % b) $6\frac{3}{4}$ % Gewinn;
516 südd. (rhein.) Gulden 40 Kr. — a) $4\frac{1}{2}$ % b) $6\frac{3}{4}$ % Gewinn;
2157 österr. Fl. 25 Neukr. — a) $4\frac{1}{2}$ % b) $6\frac{3}{4}$ % Gewinn?

3. Wieviel macht

$2\frac{1}{2}$ % (= $\frac{10}{4}$) von 40 Kilogr., von 500 ℔, von 24 Ctr.;
$3\frac{1}{3}$ % (= $\frac{10}{3}$) von 273 Fr., von 15 Thlr. 15 Sgr., von 115 öst. Fl. 45 Kr.;
$6\frac{1}{4}$ % (= $\frac{100}{16}$) von 80 Thlr., von 400 Fl., von 171 Fr., 16.;
5 % (= $\frac{1}{20}$) von 25 Meter, von 50 Ellen, von 700 Fuß;
$6\frac{2}{3}$ % (= $\frac{100}{15}$) von 150 Kilogr., von 300 ℔, von 6 Centner

$8\frac{1}{3}$ % (= $^{100}/_{12}$) von 75 Fr., von 20 Thlr., von 30 österr. Guld.; 10 % (= $^{1}/_{10}$) von 1500 Fr., von 400 Thlr., von 600 österr. Guld.; 20 % (= $^{2}/_{10}$) von 750 Fr., von 56 Thlr. 10 Sgr., von 250 östr. Guld.; 25 % (= $^{1}/_{4}$) von 100 Fr., von 26 Thlr. 20 Sgr., von 40 östr. Guld.; $33\frac{1}{3}$ % (= $^{1}/_{3}$) von 1000 Fr., von 266 Thlr. 20 Sgr., von 400 östr. Gld.?

4. Im kaufmännischen Verkehr ist es Gebrauch, die Procente von gemischten Zahlen nur nach der höchsten Sorte zu berechnen, welche man alsdann für diese Berechnung um eine Einheit vermehrt, wenn die niedern Sorten die Hälfte einer Einheit der höchsten Sorte oder mehr betragen. Genau rechnet man nur bei starken Procenten, Dezimalzahlen und in England. Wieviel erhält man demnach zu viel oder zu wenig, wenn man nach kaufmännischer Manier berechnet:

a) $^{1}/_{3}$ % Courtage von 1214 Thlr. 12 Sgr. b) $^{1}/_{2}$ % Courtage von 1275 süddeutschen (rhein.) Gulden 40 Kr. c) $1^{1}/_{2}$ % Provision von 444 Thlr. 12 Sgr. d) $1^{1}/_{2}$ % Provision von 777 rhein. Guld. 42 Kr. e) 3% Delcredere von 222 Thlr. 6 Sgr. f) 3 % Delcredere von 389 rhein. Gulden 12 Kr. g) 5 % Tara von 216 Zollcentner 20 ℔.

5. Welchen Werth haben a) 620 Thlr. b) 750 Fr. c) 250 rhein. Gulden in ausländischem Papiergeld, welches à $98^{3}/_{4}$ genommen wird (d. h. wenn 100 in Papier = $98^{3}/_{4}$ in Silber)?

6. Ein Louisd'or in Leipzig = 5 Thlr. 1 Dukaten = 3 Thlr. Welchen Werth haben a) 50 L.d'or in Gold à 9 % (d. h. mit einem Agio von 9 %); b) 120 L.d'or à $9^{1}/_{4}$ %; c) 215 L.d'or à $9^{5}/_{8}$ %; d) 112 Ducaten à 5 %; e) 53 Dukaten à $4^{1}/_{2}$ %; f) 275 Ducaten à $4^{7}/_{8}$ %?

7. Wieviel Papiergulden erhält man in Wien für 525 Silbergulden, wenn das Silberagio $12^{1}/_{2}$ % beträgt; und wieviel Silbergulden für 525 Gulden in Papier, wenn das Disagio auf dem Papier $12^{1}/_{2}$ % beträgt?

8. Von welchen Summen sind berechnet worden a) 51 Thlr. Commission zu $2^{1}/_{4}$ % b) 11 österr. Fl. 40 Nkr. Provision zu $^{3}/_{4}$ %; c) 10 Fr. 25 Courtage zu $^{1}/_{2}$ %; d) 145 Fr. 80 Tantième zu 12 %; e) 10 Thlr. 15 Sgr. Delcredere zu $3^{1}/_{2}$ %?

9. Ein Kaufmann lös't aus Waaren 1200 Fr. a) mit $4^{1}/_{2}$ % Gewinn auf der Summe, die er auf dieses Geschäft verwendet hat; b) mit $4^{1}/_{2}$ % Verlust; welches war die angelegte Summe?

10. Ein Kaufmann bezahlt für Spesen $4\frac{1}{2}$ % von der Einkaufssumme bei einem Einkaufe und ein andermal $4\frac{1}{2}$ % von der Verkaufssumme bei einem Verkaufe. In beiden Fällen betrugen die Spesen 20 Fr.,90; wieviel kosteten ihm im ersteren Falle seine Waaren, und wieviel hat er in letzterem Falle daraus gelöst, mit Berücksichtigung der Spesen?

11. Das auf einem Pachtgut errichtete Gebäude hat 6000 Fr. gekostet und ist so beschaffen, daß es 100 Jahre stehen kann. Wieviel wird dasselbe nach 49 Jahren noch werth sein, wenn man annimmt, daß die Materialien nach Verlauf von 100 Jahren immer noch 10 % des ersten Kostenpreises werth sind?

12. Mit einem Gemisch von 18000 Kilogramm Dünger und 150 Kilogr. Salz kann man 1 Hektare thoniges Erdreich gut düngen. Wieviel Salz und Dünger müßte man demnach auf 7 Hektares 39 Ares und 93 Centiares nehmen, und welchen muthmaßlichen Ertrag an Waizen gibt diese Fläche? Durch Anwendung von Salz wird das Gewicht des Getreides ungefähr um 2 % vermehrt, und 22 Kgr. Düngergenügen durchgehends, um 1 Kgr. 870 Gr. Waizen hervorzubringen.

13. Ein Getreidehändler hat 150 Hektoliter Waizen zu 20 Fr. den Hektoliter unmittelbar nach der Erndte gekauft. Da der Waizen, welcher 80 Kilogr. per Hektoliter wog, beim Austrocknen 4 % von seinem Gewicht verloren hat, so wird gefragt, wie theuer ihm jetzt der Centner zu stehen kommt?

14. Ein Eigenthümer berechnet den Preis seines Landes so, daß der jährliche Reinertrag 4 % desselben bildet. 8 Hektares 75 Ares und 90 Centiares kosten demnach 11386 Fr.,70. Wieviel beträgt der Reinertrag per Hektare?

15. Eine Wiese wurde für 1880 Fr. verkauft, und der Preis so berechnet, daß der Bruttoertrag (Ertrag ohne Abzug der Ausgaben) 4 % des Preises bildete. Wieviel Heu und Grummet à 33 Fr. per 1000 Kilogr. liefert sie jährlich?

16. Ein Eigenthümer will eine Wiese für 5680 Fr. verkaufen. Auf 40 Ares gibt sie durchschnittlich 750 Kilogr. Heu à 36 Fr. per 1000 Kilogr., und der Werth des Grummets wird zu 25 % der Heuerndte angeschlagen. Man berechnet den Ertrag, nach Abzug der Kosten von 38 Fr. per Hektare, zu $3\frac{1}{3}$ % des Werthes; wie groß muß die Wiese sein?

17. Welches ist der Preis einer Wiese von 3 Hektares 25 Ares, deren Ertrag an Heu und Grummet so viel werth ist, als 5000 Kilogr. gutes Heu à 36 Fr. per 1000 Kilogr.? Jeder Hektare verursacht jährlich eine Ausgabe von 38 Fr., und der Reinertrag der Wiesen beträgt in der Regel $3^1/_3$ % ihres Werthes.

18. Eine Wiese von 4 Hektares 48 Ares, welche gewöhnlich von stehendem Wasser überschwemmt wurde, lieferte auf je 40 Ares nur 300 Kilogr. Heu von schlechter Beschaffenheit, à 20 Fr. per 1000 Kilogr. Um das Wasser abzuleiten, ließ der Eigenthümer einen Graben aufwerfen der 180 Meter lang, 0,80 Meter breit und 0,60 Meter tief war. Dadurch wurde der Ertrag im ersten Jahr (an Quantität und Qualität) um 25 % und im zweiten Jahr um 100 % vermehrt. Es wird gefragt: 1) welche Fläche der Wiese ging durch das Aufwerfen des Grabens verloren; 2) wieviel Kubikmeter Erde konnten aus dem Graben über diese Wiese gestreut werden, und wie hoch kam dieselbe auf der ganzen Ausdehnung zu liegen; 3) um wieviel wurde der Werth der Heuerndte im ersten und um wieviel im zweiten Jahre gesteigert?

19. Im ganzen Königreich Sachsen gibt es nur ungefähr 39000 Katholiken; wieviel Procent von der ganzen Bevölkerung bilden dieselben? S. Seite 47.

20. 75 Meter kosteten 975 Fr. und werden verkauft zu 14Fr.,30 den Meter; wieviel % beträgt der Gewinn?

21. Das Nettogewicht einer Waare beträgt 1241Kilogr.,50, die Tara beträgt 58Kilogr.,50; wieviel % (vom Bruttogewicht) beträgt die Tara?

22. Jemand verkauft mit $12^1/_2$ % Gewinn a) für 11Fr.,25, b) für 3 Thlr., c) für 45 Fr., d) für 12 Thlr., e) für 45 Thlr., f) für 45 Sgr., g) für 46 Thlr. 15 Sgr. Wieviel beträgt sein Gewinn?

23. Bei einem Bankerott werden die Gläubiger ausbezahlt mit 35 % Verlust. **A** erhält 130 Fr., **B** 650 Fr., **C** 780 Fr., **D** 663 Fr. Wieviel hat jeder verloren?

24. Ein Commissionär liefert einen Reinertrag von 760 Fr. ab, nachdem er 5 % für Spesen abgezogen; wieviel betragen die Spesen?

25. Eine Assecuranzgesellschaft berechnet die Prämien zu $1^1/_8$ ‰. a) Wieviel muß man bezahlen um 4000 Fr., 10000 Fr., 12000 Fr. assecuriren zu lassen? b) Welche Summe hat derjenige versichern las-

fen, welcher eine Prämie bezahlt von 1 Thlr. 3 Sgr. 9 Pf., — von 26 Sgr. 2 Pf., — von 9 Sgr.?

26. Zu wieviel ‰ hat man bei einer Feuerversicherungsgesellschaft ein Haus von 11000 Fr. versichern lassen, wofür man eine jährliche Prämie von 5Fr.,50 bezahlt?

27. Zu wieviel ‰ hat man Möbel im Werthe von 5000 Fr. versichern lassen, wenn man dafür eine jährliche Prämie von 4Fr.,50 bezahlt?

28. Die verschiedenen Beträge folgender Factura zu berechnen, die ein Commissionär von Havre einer Sendung von Waaren, die er für einen fremden Kaufmann eingekauft hat, beifügt.

100 Tierçons Carolinen-Reis.

Btto 32000 Kilogr.

Ta . . (a). Kilogr. à 12 %. Fr. Ct.

Ntto. . . . . (b). Kilogr. à 30 Fr. per 50 Kilogr. . . . .(c). .

Discont 2 % . . . . . .(d). .

. .(e). .

Spesen.

Empfangen, zeichnen, zurichten, an Bord bringen 125Fr,00

Ausgangszoll à 25 Ct. per Kilogr., und 20 %, Stempel 25 Ct. . . . .(f). .

Erlaubnißschein, Connossament, Porto und kleine Spesen. 12,75

Courtage ¼ %. . . . .(g). . . .(h). .

. .(i). .

Commission 2 % . . . .(k). .

. .(l). .

Für a setze man die Tara; für b das Nettogewicht; für c den Preis, berechnet nach dem Nettogewicht; für d den Betrag des Discontes von 2 %; für e den Betrag der Rechnung nach Abzug dieses Discontes; für f den Ausgangszoll, welcher nach dem Bruttogewicht berechnet wird mit Hinzufügung eines Additionalzolles, der 20 % des ersten Zolles beträgt, und der Stempelgebühr von 25 Ct.; für g die Courtage, welche nach dem Preise e berechnet wird; für h die Summe der Spesen 125+f+12,75+g; für i den nunmehrigen Preis der Waare e+h; für k die Commission, welche nach diesem Preise i berechnet

wird; für 1 den Preis der Waare k. — Connossament = vom Schiffer ausgestellter Ladungsschein.

29. Eine ähnliche Factura eines Commissionärs von Antwerpen aufzustellen nach folgenden Angaben: 50 Fäßchen Amerikanischen Terpentinöls, Brutto 7701 Kilogr., Tara 20 %, à 40 Fr. per 50 Kilogr., Sconto $1\frac{1}{2}$ %. Spesen: Empfangen, wägen, verladen 30 Fr.,50; Küferlohn und Bleche 7 Fr.,30; Declaration, Acquit und Stempel 3 Fr.,25; Frachtbrief, Porto und kleine Spesen 3 Fr.,20. — Commission $1\frac{1}{2}$ %.

30. Eine ähnliche Factura eines Commissionärs von Hamburg aufzustellen über 50 Fässer Smyrna-Rosinen, Brutto 9575 ℔, Ggw. 1 %, Tara (vom Reste) 12 %, à $16\frac{1}{2}$ Bancomark per 100 ℔, Decort 1 %, Spesen 52 Bancomark 8 Schilling, Provision $1\frac{1}{2}$ %. — 1 Bancomark = 16 Schilling. 1 Schilling = 12 Pfennige.

Anmerkung. Man hätte dasselbe Nettogewicht gefunden, wenn man zuerst 12 % Tara vom Bruttogewicht und von diesem Reste 1 % Gutgewicht abgezogen hätte. Zu beweisen.

31. Eine ähnliche Factura von Hamburg auszufertigen über 50 Säcke Santos-Kaffee, Brutto 7787 ℔, Tara 3 ℔ per Sack, Ggw. $\frac{1}{2}$ % (vom Bruttogewicht); à 6 Schilling per ℔, Decort 1 %, Spesen 16 Bancomark 10 Schilling, Provision $1\frac{1}{2}$ %.

32. Ein Commissionär aus Hamburg stellt eine Factura aus über 50 Ballen süße sicilianische Mandeln, Bruttog. 9972 ℔, Tara 3 ℔ per Ballen, Ggw. 1 % (vom Bruttogewicht), à 43 Bancomark 8 Schilling per 100 ℔, Discont 1 %, Spesen 19 Bancomark 12 Schilling, Provision $1\frac{1}{2}$ %.

33. Ein Commissionär aus Havre stellt eine Factura aus über 200 Säcke Salpeter, Bruttog. 18611 Kilogr., Tara 6 Kilogramm per Sack, Refaction $2\frac{1}{4}$ % vom Reste nach Abzug der Tara, à 52 Fr. per 50 Kilogr., Discont 2 %. Empfangen, zeichnen, an Bord bringen rc., 70 Fr., Ausgangszoll 15 Ct. per 100 Fr. vor Abzug des Discont's und Additionalzoll 20 % des vorigen Zolles. Connossament, kleine Spesen 95 Fr., Courtage $\frac{1}{4}$ %. Commission 2 %.

34. Wenn ein Commissionär für fremde Rechnung Waare verkauft, so stellt er eine Verkaufsrechnung aus, welche sich von den vorigen darin unterscheidet, daß die Spesen vom Reinertrag abge-

zogen werden. Beispiel: Ein Commissionär von Hamburg verkauft im Auftrage eines Londoner Kaufmanns, und stellt folgende Rechnung auf:

100 Säcke Ceylon-Kaffee
Btto 14562 ℔
Ggw. . . . . ℔ à $2\frac{1}{2}$ %.
Ta. 327 ℔

Netto . . . . ℔ à 9 Schilling. . . . Bancomark . . . . .
Discont 1 % . . . . .
Bancomark . . (a) .

Spesen.

Fracht von 143 Centner 4 ℔
à 1 Pfund Sterl. (b) per Ton (c) Pfd. . . . . . .
(d) Primage 15 % Pfd. . . . . . .
Macht für Fracht Pfd. . . . . . .
(e) à 13.10 Bancomark . . . . . .
Aufbringen, Aufwägen ꝛc. . . . . 23 — 5 Sch.
Lagermiethe für 1 Monat 6 — 7 Sch.
(f) Eingangszoll $\frac{1}{2}$ % . . . .
Zuschlag und Zollschein = 10 % des vor. Zolles . . . .
(g) Courtage $\frac{5}{8}$ % . . . .
(h) Provision $1\frac{1}{2}$ % . . . . (i). . . .
Reinertrag . . . (k) . . .

a = Betrag nach Abzug des Discounts b. 1 Pfd. Sterl. = 20 Schillinge. 1 Sch. = 10 Pence c. 1 Ton = 20 Centner. 1 Centn. = 4 Quarters von 28 ℔. d. Primage = Zuschlag, der von dem Frachtpreise berechnet und zu demselben hinzugefügt wird. e) Verwandlung des Londoner Geldes in Hamburger Münze, indem man 1 Pfd. Sterl. zu 13 Bancomark 10 Schill. berechnet. f. und g. berechne man nach dem Bruttobetrag vor Abzug des Discounts. h. berechne man von dem Betrage nach Abzug des Discounts. i = Summe der Spesen. k=a—i.

35. Ein Kaufmann aus Hamburg beabsichtigt 430 Sack Guano nach Leipzig zu schicken, um sie hier mit einem Gewinne von 12%

(Zinsen seines Geldes mit einbegriffen) zu verkaufen, und stellt folgende Calculatur auf, welche man ergänzen soll.

Btto. 60 000 ℔
Ta. .... ℔ à 2 ℔ per Sack

Bleibt .... ℔
Ggw. .... ℔ à 1 % (vom bleibendem Gewicht.)

Ntto. .... ℔ à 167 Bancomark pr. 2000 ℔	.. Bm. .. Sch. (a)
Discont 1 %	.. Bm. .. Sch. (b)
	.. Bm. .. Sch. (c)
Verladungskosten à 3/4 Sch. per Sack	.. Bm. .. Sch. (d)
	.. Bm. .. Sch. (e)
Gewinn 12 %	.. Bm. .. Sch. (f)
	.. Bm. .. Sch. (g)
à 161	.. Thlr. .. Sgr. (h)
Spesen in Leipzig.	
Assecuranz 1 %	.. Thlr. .. Sgr. (k)
Fracht von Hamburg bis Leipzig à 12 3/4 Sgr. per 600 Ctr.	.. Thlr. .. Sgr. (l)
Spesen in Leipzig 1 Sgr. per Centner	.. Thlr. .. Sgr. (m)
Porto und kleine Spesen	.. Thlr. .. Sgr. (n)
	.. Thlr. .. Sgr. (o)
Commission 3%	.. Thlr. .. Sgr. (p)
	.. Thlr. .. Sgr. (q)

Wie theuer soll demnach 1 Centner Brutto in Leipzig verkauft werden?

c=a−b. e=c+d. g=e+f. h=g in Thlr. verwandelt à 151, d. h. 300 Bancomark = 151 Thlr. k = Assecuranz, welche nach dem Werthe der Waare vor Hinzufügung der 12% Gewinnes zu berechnen ist; l nach Bruttogew. zu berechnen. 1 Ctr. = 100 ℔. — o=h+k+l+m+n. p = Commission, zu berechnen nach o. q=o+p= der Preis der Waare in Leipzig.

36. Wieviel ‰ macht 1/2 %; 1/4 %; 1/8 %; 1/3 %; 3/5 %; 1 Sgr. von 10 Thlr.; 4 Kreuzer von 10 rhein. Gulden; 2 von 500; 5 von 800?

37. Ein Friedrichsd'or (= 5 Thaler in Gold) gilt 5 Thlr. 20 Sgr.; wieviel % beträgt das Goldagio?

38. a) Wenn in Österreich das Silberagio auf 20 % steht, wieviel % muß dann österreichisches Papiergeld in Leipzig verlieren, wo man das Disagio nach dem Papiergeld berechnet? b) wie steht das Silberagio in Österreich, wenn österreichische Banknoten in Leipzig 15% verlieren?

39. Ein Kaufmann gewährt einen Rabatt von 15% auf 100; wieviel % muß er denjenigen Abnehmern gewähren, welchen er die Preise nach Procenten von 100 stellen will?

40. In Hamburg genießen Bancomark gegen Courantmark ein Agio von circa 25%; wieviel beträgt das Disagio der Courantmark?

41. Wieviel Bancomark macht 20 Thaler? 1 Thlr. = $2^1/_2$ Courantmark.

42. Wieviel erhält man, wenn man nach der Zahl 1000 berechnet a) 1 % von 100 b) 1 % auf 100 c) 1 % in 100?

43. Man berechne

1⁰ nach 1200 a) 1 % von 100 b) 1 % auf 100 c) 1 % in 100.
2⁰ nach 600 a) 2 % von 100 b) 2 % auf 100 c) 2 % in 100.
3⁰ nach 400 a) 3 % von 100 b) 3 % auf 100 c) 3 % in 100.
4⁰ nach 300 a) 4 % von 100 b) 4 % auf 100 c) 4 % in 100.
5⁰ nach 240 a) 5 % von 100 b) 5 % auf 100 c) 5 % in 100.

44. Man berechne

1⁰ nach 1200 a) 5 % von 100 b) 5 % auf 100 c) 5 % in 100.
2⁰ nach 600 a) 10 % von 100 b) 10 % auf 100 c) 10 % in 100.
3⁰ nach 300 a) 20 % von 100 b) 20 % auf 100 c) 20 % in 100.
4⁰ nach 200 a) 30 % von 100 b) 30 % auf 100 c) 30 % in 100.
5⁰ nach 150 a) 40 % von 100 b) 50 % auf 100 c) 40 % in 100.
6⁰ nach 120 a) 50 % von 100 b) 50 % auf 100 c) 50 % in 100.

45. Hängt die Größe des Unterschiedes, den die Procentsätze **von**, **auf** und **in** 100 ergeben, mehr ab von den hohen Procenten oder von der Größe der Zahlen, nach welchen die Procente berechnet werden? Man vergleiche die Resultate der drei vorigen Aufgaben, namentlich die angezeigten und nicht ausgerechneten Resultate?

46. Wieviel % auf 100 und wieviel % in 100 machen a) 1% von 100 b) 5 % von 100 c) 10 % von 100 d) 20 % von 100?

Zinsrechnung.

180. Man nennt **Zins** oder **Interesse** das Geld, welches Jemand, der eine Summe geliehen hat oder schuldig ist, für die Benutzung dieser Summe bezahlt. Der Entlehner des Geldes heißt **Schuldner** oder **Debitor**, der Darleiher **Gläubiger** oder **Creditor**, die geliehene Summe heißt **Capital**.

Die Zinsen werden nach Procenten vom Capital mit Berücksichtigung der Zeit berechnet. Die Zahl, welche die Procente bezeichnet, die für ein Jahr entrichtet werden, heißt der **Zinsfuß**. Das Civilgesetzbuch erlaubt im gewöhnlichen Leben nie mehr als 5 % und in Handelssachen nie mehr als 6 % Zinsen zu nehmen. Dieses ist auch der gesetzliche Zinsfuß, d. h. wenn Jemand gerichtlich angehalten wird, ein Capital mit den Zinsen zu erlegen, würde das Gericht, wenn keine andere Uebereinkunft getroffen war, diesen Zinsfuß annehmen. Die Zinsen erfallen, wenn das Capital ein Jahr ausgeliehen ist. Rückständige Zinsen von mehr als 5 Jahren können nicht eingefordert werden. Unerlaubte Zinsen heißen **Wucher**. Man nennt auch überhaupt Zinsen den Gewinn, den man aus einer Summe Geldes zieht, die man in einem Geschäfte oder auf irgend welche Weise nutzbringend angelegt hat.

181. **Aufgabe 1. Man sucht die Zinsen** und kennt das Capital = 300 Fr., den Zinsfuß = 4 %, und die Zeit = 4 Jahre.

Auflösung. 100 Fr. ertragen in 1 Jahre Fr. 4

1 . . . . 1 . . $\frac{4}{100}$

350 . . . . 1 . . $\frac{4 \times 350}{100}$

350 . . . . 4 . . $\frac{4 \times 350 \times 4}{100} = 56$

Oder:

100	. . . .	1	. .	4
300	. . . .	1	. .	12
50	. . . .	1	. .	2
350	. . . .	1	. .	14
350	. . . .	4	. .	14×4=56.

182. Aufgabe 2. Man sucht das Capital, kennt die Zinsen = 212Fr.,50, den Zinsfuß = 5 % und die Zeit = 4 Jahre 3 Monate.

Auflösung. 4 Jahre 3 Monate = $4\frac{1}{4}$ Jahr = $\frac{17}{4}$ Jahre. W. m. i. 1 Jahr 5 Fr. Zins. erh., muß m. ausl. Fr. 100

$$\ldots \frac{17}{4} \,.\, 5 \ldots\ldots \frac{100 \times 4}{17}$$

$$\ldots \frac{17}{4} \,.\, 1 \ldots\ldots \frac{100 \times 4}{17 \times 5}$$

$$\ldots \frac{17}{4} \,.\, 212^{Fr.},50 \ldots\ldots \frac{21250 \times 4}{17 \times 5} = 1000$$

Oder: In $4\frac{1}{4}$ Jahren erträgt ein zu 5 % ausgeliehenes Capital $5 \times 4\frac{1}{4} = 20\frac{5}{4} = \frac{85}{4}$ %. Machen $\frac{85}{4}$ % einer Summe 212Fr., so macht 1 % derselben $\frac{212^{Fr.},50 \times 4}{85}$, und 100 % derselben oder die Zahl selbst $\frac{21250 \times 4}{85} = 1000$ Fr.

183. Aufgabe 3. Man sucht die Zeit und kennt das Capital = 500 Thlr., den Zinsfuß = $4\frac{1}{2}$ % und die Zinsen = 82 Thlr. 15 Sgr.

Auflösung. 100 Thlr. ertragen $4\frac{1}{2}$ Thlr. in Jahr. 1

$$1 \;.\; \text{erträgt } 4\frac{1}{2} \ldots\ldots 100$$

$$500 \;.\; \text{ertragen } 4\frac{1}{2} \ldots\ldots \frac{100}{500}$$

$$500 \ldots\ldots \frac{1}{2} \ldots\ldots \frac{100}{500 \times 9}$$

$$500 \ldots\ldots 82\frac{1}{2} = \frac{165}{2} \,..\, \frac{100 \times 165}{500 \times 9}$$

$= 3\frac{2}{3}$ Jahre oder 3 Jahre und 8 Monate.

Oder: Von 500 Thlrn. zu $4\frac{1}{2}$ % erhält man in 1 Jahre $22\frac{1}{2}$ Thlr.; um davon $82\frac{1}{2}$ Thlr. zu erhalten, muß man diese Summe ausleihen $82\frac{1}{2} : 22\frac{1}{2} = 3\frac{2}{3}$ Jahre.

184. Aufgabe 4. Man sucht den Zinsfuß und kennt das Capital = 250 rhein. Gulden, die Zeit = 3 Jahre und 9 Monate und die Zinsen = 46 Gulden 52 Kreuzer 2 Pfennig.

Auflösung. $3\frac{3}{4}$ Jahre = $\frac{15}{4}$ Jahr, und 46 Gulden 52 Kr. 2 Pf. = 46 G. $52\frac{1}{2}$ Kr. = 46 G. $\frac{105}{2}$ Kr. = $46\frac{105}{120}$ G. = $46\frac{7}{8}$ G. = $\frac{375}{8}$ G.

Um von obigem Capital in 1 Jahre 250 Gulden zu erhalten, muß man es anlegen zu 100 %.

Um davon in $\frac{15}{4}$ J. 250 G. z. e., m. m. e. a. zu % $\frac{100 \times 4}{15}$

$$\ldots\ \frac{15}{4}\ .\ 1\ \ldots\ \frac{100 \times 4}{15 \times 250}$$

$$\ldots\ \frac{15}{4}\ .\ \frac{375}{8}\ \ldots\ \frac{100 \times 4 \times 375}{15 \times 250 \times 8} = 5\ \%$$

Oder: Da 1 % von 250 Gulden = $\frac{5}{2}$ Gulden, so sind $\frac{375}{8}$ Gulden = $\frac{375}{8} : \frac{5}{2} = \frac{75}{4}$ % von 250 G. Ertragen dieselben in $3\frac{3}{4}$ Jahren $\frac{75}{4}$ %, so ertragen sie in 1 Jahr $\frac{75}{4} : \frac{15}{4} = 5$ %.

Anmerkung. Man hätte die Gulden und Kreuzer auch in Pfennige verwandeln können; häufig thut man aber am allerbesten, sie bei Procent- und Zinsrechnungen in Dezimalzahlen von Gulden zu verwandeln. Da

6 Kr. = 0,1 Gulden, so sind 48 Kr. = 0,8 G.
3 Kr. = 0,05 G.
1 Kr. 2 Pf. = 0,025 G. und
52 Kr. 2 Pf. = 0,875 G.

Zu 1 % gäben 250 Guld. in $\frac{15}{4}$ Jahr 2,50 G. × $\frac{15}{4}$ 9,375 G. Da dieselben aber 46,875 G. ertragen, so sind sie angelegt zu 46,875 : 9,375 = 5 %.

185. Wäre statt des Capitals oder der Zinsen die ganze Schuld (Capital mit Zinsen) bekannt, so ließen sich ebenfalls die andern Zahlen berechnen. Da die eine dieser Zahlen sich unmittelbar ergibt, wenn man die beiden andern kennt, so erleiden die dritte und vierte Aufgabe kaum eine Veränderung, wenn statt des Capitals oder der Zinsen die Schuld bekannt wäre. Ist dieses aber der Fall bei der ersten und zweiten Aufgabe, so entsteht die **Aufgabe 5**, bei welcher man die rückzuzahlende Summe — 1212 Fr.,50. — den Zinsfuß — 5 % — die Zeit — 4 Jahre 3 Monate — kennt, und **das Capital sowie die Zinsen sucht.**

Auflösung. 4 Jahre 3 Mon. $= 4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ Jahre. Für 100 Fr., die zu 5 % verzinst sind, muß man nach $\frac{17}{4}$ Jahren zurückzahlen $100+5\times\frac{17}{4}=\frac{485}{4}$. Müßte man also unter diesen Umständen $\frac{485}{4}$ zurückzahlen, so hätte man 100 Fr. geliehen; müßte man nur 1 Fr. zurückzahlen, so hätte man $\frac{100\times4}{485}$ Fr. geliehen; sind aber 1212 Fr.,50 zurückzuzahlen, so hat man $\frac{121250\times4}{485} = 1000$ Fr. geliehen.

Anmerkung. Wenn man, wie bei Aufgabe 2, angesetzt hätte: Will man in 1 J. 105 Fr. zurückerh., so muß man anlegen 100 Fr., so hätte man richtig schließen dürfen:

Will m. in 1 Jahr 1 Fr. zurückerh., so muß man anlegen $\frac{100}{105}$ Fr.

. . . 1 . 1212 Fr.,50 . . . . $\frac{121250}{105}$ Fr.

denn, wenn das Capital 2, 3, 4 mal größer wird, so werden auch die Zinsen und die rückzuzahlende Summe 2, 3, 4 mal größer. Man hätte aber nicht schließen dürfen:

Will m. in $\frac{1}{4}$ Jahr 1212 Fr.,50 zurückerh., so m. m. anleg. $\frac{121250\times4}{105}$ Fr.

u. w. m. i. $\frac{17}{4}$. 1212 Fr.,50 . . . . $\frac{121250\times4}{105\times17}$ Fr.

denn, die rückzuzahlende Summe besteht aus zwei Theilen: dem Ca-

pitale, das mit der Zeit nicht wächst und den Zinsen, welche in 2, 3, 4 mal so langer Zeit 2, 3, 4 mal größer werden; die rückzuzahlende Summe wird also in 2, 3, 4 mal so langer Zeit größer, aber nicht 2, 3, 4 mal so groß, und man kann wohl sagen: Um in einer 4 mal kürzern Zeit ebensoviel Zinsen zu erhalten, muß man ein 4 mal stärkeres Capital anlegen; falsch wäre es aber zu sagen, um in 4 mal kürzerer Frist dieselbe Summe zurückzuerhalten, müsse man 4 mal mehr ausleihen.

Aufgaben.

Zinsfuß 5 %

1. Wieviel Zinsen ertragen

a) 300 Fr. in 1 Jahr — in 2 J. — in 3 J. — in 6 J. — in 10 J.
b) 7500 . . 1 . . . . 2 . . . 3 . . . 6 . . . 10 .
c) 375 . . 1 . . . . 2 . . . 3 . . . 6 . . . 10 .
d) 937Fr.,50 1 . . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 6 .
e) 416Fr.,75 1 . . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 6 .

Wie findet man auf die leichteste Weise die Zinsen von 5 % für eine gerade Anzahl von Jahren?

2. Welches sind die Zinsen von

a) 80 Thlr. für 1 J. — f. 2 J. — f. 3 J. — f. 6 J. — f. 10 J.
b) 2000 . . . 1 . . . 2 . . . 3 . . . 6 . . . 10 .
c) 100 . . . 1 . . . 2 . . . 3 . . . 6 . . . 10 .
d) 250 . . . 1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 6 .
e) 111 . . . 1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 6 .

3. Welches sind für 1 Jahr — für 2 Jahre — für 3 Jahre — für 4 Jahre — für 8 Jahre — für 10 Jahre — für 12 Jahre die Zinsen von a) 2125 österr. Florin, b) 625 rhein. Gulden, c) 28 Pfd. Sterling [s. Seite 58], d) 125 Bancomark? [s. S. 178. Aufgabe 30.]

4. Wieviel betragen die Zinsen für 6 Jahre — 7 Jahre — 8 Jahre von a) 658Fr.,75, b) 175 Thlr. 20 Sgr., c) 263 österr. Fl. 50 Nkr., d) 309 rhein. Gulden 10 Kr., e) 351⅓ Bancomark, f) 26 Pfd. Sterl. 7 Schill.

Anmerkung. Man kann zuerst die Zinsen für 5 Jahre berechnen, davon dann den fünften Theil nehmen und denselben 1 — 2 — und 3 mal zu den Zinsen für 5 Jahre addiren.

5. Wieviel % des Capitals betragen die Zinsen in 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 Monaten?

6. Wieviel Zinsen ertragen in 1 — 3 — 5 — 6 — 8 — 9 Monaten a) 1200 Fr., b) 963 Fr.,60, c) 215 österr. Fl. 30 Nkr., d) 660 Thlr., e) 124 Thlr. 15 Sgr.

7. Wieviel Zinsen ertragen

a) 1800 Fr. vom 3. Januar — 27. Februar desselben Jahres;
b) 2520 Fr. vom 1. März — 1. Oktober desselben Jahres;
c) 985 Fr.,50 vom 3. Juli — 31. Dezember desselben Jahres;
d) 822 Thlr. 10 Sgr. vom 9. März — 31. Dezember desselben Jahres;
e) 400 Thlr. 15 Sgr. vom 4. März 1862 — 31. Dezember 1865?

Man berechne diese Zinsen 1] nach der in England, den Niederlanden und den Vereinigten Staaten üblichen Manier, indem man die Jahre und Tage zählt und jeden Tag berechnet als $^1/_{365}$ Jahr. 2] indem man die Monate und Tage zählt und jeden Monat berechnet als $^1/_{12}$ Jahr, und jeden Tag als $^1/_{30}$ Monat, oder, was dasselbe ist, indem man jeden Monat zu 30 Tagen und das Jahr zu 360 Tagen berechnet. 3] nach einer ebenfalls üblichen Weise, indem man die Jahre und Tage zählt und jeden Tag berechnet als $^1/_{360}$ Jahr.

Welche Weise ist die richtige, welche die unrichtigste, und welche die bequemste?

8. Wieviel betragen für einen Tag, wenn man das Jahr zu 360 Tagen berechnet, die Zinsen von 1 Fr., 1 österr. Fl., 1 Thlr., 1 Gulden, von 10 Fr., 10 öst. Fl., 10 Thlr., 72 Fr., 50 öst. Fl., 50 Thlr., 50 rhein. Gulden, 100 Fr., 100 öst. Fl., 100 Thlr., 100 rhein. Gulden?

9. Wieviel betragen zusammen die Zinsen von

500 Franken in 250 Tagen,
250 Franken in 128 Tagen,
400 Franken in 102 Tagen,
150 Franken in 61 Tagen, und
300 Franken in 12 Tagen? (1 Jahr = 365 Tage.)

Anm. Man berechne zuerst, wie oft von jedem Capital die täglichen Zinsen von einem Franken zu bezahlen sind. Vom ersten ist z. B. 500×250 mal dieser Zins zu entrichten. Die Zahlen, welche dieses ausdrücken (500×250; 250×128 u. s. w.), heißen in der Handelssprache **Zinszahlen** (nombres). Man addire dann die Zinszahlen und multiplizire ihre Summe durch die Zinsen von einem Franken in einem Tag.

10. Wieviel muß man ausleihen, um jährlich 100 Fr. — 175 Fr. — 20 Thlr. — $12\frac{1}{2}$ Gulden Zinsen zu erhalten?

11. Welches Capital erträgt

a) in 3 Jahren 132 Franken;
b) in $2\frac{1}{2}$ Jahr 50 Thaler;
c) in $3\frac{1}{2}$ Jahr 10 südd. Guld. 9 Kr.;
d) in 1 Monat 2 Franken;
e) in 1 Tag 1 Franken;
f) in 1 Tag 5 Centimes;
g) in 1 Tag 1 Centime;
h) in 1 Tag 1 Silbergroschen;
i) in 1 Tag 1 Pfennig;
k) in 1 Tag 1 Kreuzer [südd.];
l) in 1 Tag 1 Neukr. [österr.];
m) in 25 Tagen 3Fr.,75?

[1 Tag = $\frac{1}{30}$ Monat.]

12. Welches Capital erlangt einen Werth von 1000 Fr. a) in 7 Jahren, b) in 2 Jahren, c) in 5 Jahren, d) in $2\frac{1}{2}$ Jahren, e) in 11 Monaten, f) in 115 Tagen? [1 Tag = $\frac{1}{30}$ Monat.]

13. Wie lange muß man 3600 Franken ausleihen, um an Zinsen zu erhalten a) 540 Fr., b) 45 Fr., c) 10 Fr., d) 50 Centimes? [1 Mon. = 30 Tage.]

Zinsfuß 4 %.

14. Wieviel betragen die Zinsen von

a) 2125 öst. Gulden in 5 Jahren;
b) 451Fr.,50 in 17 Jahren;
c) $850\frac{2}{3}$ Thlr. in 10 Jahren;
d) 650 rh. G. 45 Kr. in 3 Jahren;
e) 120 Pfd. Sterl. in 9 Mon.;
f) 340 öst. Fl. 45 Nkr. in 2 J. 5 M.;
g) $75\frac{3}{4}$ rhein. Guld. in 15 Mon.;
h) 825 rh. G. 20 Kr. in 17 Mon.;
i) 375 Fr. in 219 Tagen;
k) 218Fr.,60 in 1 Jahr 73 Tag.;
l) $85\frac{1}{3}$ Thlr. in 146 Tagen;
m) 102 öst. Fl. 20 Nkr. in 303 T.?

[das Jahr = 365 Tage.]

15. Wieviel betragen die jährlichen — die monatlichen — die täglichen Zinsen von a) 100 Fr. — b) 100 Thlr. — c) 100 rhein. Gulden — d) 100 österr. Fl. — e) 1 Fr. — f) 1 Thlr. — g) 1 rhein. Gulden — h) 1 österr. Florin? [1 Jahr = 360 Tage.]

16. In wieviel Monaten betragen die Zinsen a) $\frac{1}{3}$ % — b) $\frac{1}{2}$ % — c) 1 % — d) 2 % — e) 3 % des Capitals?

17. Wieviel muß man ausleihen, um an Capital und Zinsen einziehen zu können

a) nach 5 Jahren 1000 Fr.;
b) nach $2\frac{1}{2}$ Jahren 2000 Fr.;
c) nach 18 Monaten 42Fr.,40;
d) nach 17 Monaten 1092 Fr.?

Zinsfuß 6 %.

18. Wieviel betragen die jährlichen, monatlichen und täglichen

Zinsen von a) 100 Fr. — b) 100 Thlr. — c) 100 rhein. Guld. — d) 100 österr. Fl. — e) 1 Fr. — f) 1 Thlr. — g) 1 rhein. Fl. — h) 1 österr. Fl. [1 Jahr = 360 Tage.]?

19. Welche Capitalien ertragen 33 Fr.,50

a) in 5 Jahren; c) in 16 Monaten; e) in 219 Tagen;
b) in 16 Jahren; d) in 7 Monaten; f) in 2 J. 146 Tagen?

[1 Jahr = 365 Tage.]

Zinsfuß $4^1/_2$ %.

20. Welchen Werth [Capital und Zinsen] erlangen

a) 375 Fr. in 6 Jahren; f) 500 Fr. in 4 Monaten;
b) 751 Fr.,25 in 8 Jahren; g) 1000 Fr. in 2 Monaten;
c) $200^1/_3$ Thlr. in 4 Jahren; h) 84 Fr.,60 in 20 Tagen;
d) 350 rh. G. 35 Kr. in 6 J.; i) 130 Thlr. 20 Sgr. in 75 Tagen;
e) 250 Fr. in 8 Monaten; k) 522 Thlr. 20 Sgr. in 1 J. 235 T.?

Anm. Man kann die Zinsen zu 5 % berechnen und davon $^1/_{10}$ abziehen. [1 Jahr = 360 Tage.]

Verschiedene Zinsfüße.

21. Wieviel Zinsen ertragen zu 1 %, zu 2 %, zu 3 %, zu 5 %, zu $2^1/_2$ %, zu $5^1/_2$ %, zu 7 %, zu $7^1/_2$ % folgende Summen

a) 3000 Fr. in 4 Jahren; c) 900 Thlr. in 8 Monaten;
b) 4000 Fr. in 3 Jahren; d) 800 Thlr. in 9 Tagen?

[1 Jahr = 360 Tage.]

22. Wie lange war jedes der folgenden Capitalien ausgeliehen

a) 7500 Fr. zu 5 %, welche 2250 Fr. Zinsen brachten;
b) 2000 Thlr. zu 5 %, welche 600 Thlr. Zinsen brachten;
c) 2000 Thlr. zu $2^1/_2$ %, welche 25 Thlr. Zinsen brachten;
d) 1226 Fr.,50 zu 2 %, welche 3 Fr.,58 Zinsen brachten;
e) 273 Fr.,75 zu $3^1/_4$ %, welche mit den Zinsen sich beliefen auf 290 Fr.;
f) $108^2/_3$ Thlr. zu 6 %, welche mit den Zinsen sich beliefen auf 109 Thlr. 18 Sgr. 8 Pf.;
g) $54^3/_4$ Thlr. zu $4^1/_3$ %, welche mit den Zinsen sich beliefen auf 5 Thlr. 2 Sgr. 6 Pf.? [1 Monat = 30 Tage.]

23. Man schließe folgendes Conto-corrent [laufende Rechnung] ab, das ein Bankhaus in Metz einem Geschäftsfreunde aus Luxemburg zustellt.

Herrn C. E. Lepont und Cie. in Luxemburg. Ct. Ct. mit 5 %.

Sollen. | Haben.

1864.			Capitalien. Fr.	Ct	Verfall.	Tage.	Zinszahlen.	1864.			Capitalien. Fr.	Ct	Verfall.	Tage.	Zinszahlen.
Juli	1	Saldo voriger Rechnung	1350	—	30 Juni			Juli	15	Zahlg. v. L. Schnieder	1200		15 Juli		
"	15	Tratte von N. Faber hier	1200	—	15 Aug.			"	25	Rimesse auf Paris 1500 à 99 . . .	x		10 Aug.		
Aug.	20	Ihre Tratte o/B .	950	—	15 Sept.			Aug.	15	Rimesse auf Lyon 3000 à 100 . .	3000		1 Sept.		
Sept.	18	Anweisung o/C . .	1500	—	30 Sept.			Sept.	10	Rimesse auf hier .	1500		20 Sept.		
Oct.	15	Zahlung an P. Prost	4150	—	15 Oct.			Oct.	30	Zahlung v. J. Tulos	900		30 Oct.		
Nov.	20	Ihre Tratte o/D .	3500	—	15 Dec.			Dez.	31	Zinsen à 5 % von u Zinszahlen . .	......	...			
Dec.	31	Ausgleichung der Zinszahlen. . .					......	"		Saldo auf neue Rechnung.	... ...	...			
"	"	Provision von Fr. y à 1/3 %	......	....											
"	"	Courtage von Fr. z à 1 ‰	......	....											
"	"	Porto 2c.	9	50											
1865.															
Jan.	1	Saldovortrag . .													

S. E. et O.
Metz, den 31. December 1864.
M. GRÈNE.

Erklärung. Die linke, mit Sollen, S., Debet, oder D. bezeichnete Seite enthält die Schulden, die rechte mit Haben, H., Credit oder C. bezeichnete das Guthaben dessen, der das Contocorrent empfängt.

Juli 1. Saldo = Betrag der Rechnung beim letzten Rechnungsabschluß am 30. Juni 1864.

Juli 15. Tratte von N. F. will sagen, daß N. F. für Rechnung des Empfängers auf den Bankier 1200 Fr., zahlbar am 15. August, gezogen habe. Der Bankier hat sie am 15. August an N. F. bezahlt und sie dem Empfänger angeschrieben.

Aug. 20. Ihre Tratte. Der Empfänger verschrieb sich vom Bankier die Summe von 950 Fr., welche ihm, oder nach seiner Ordre einem andern, bezahlt wurden.

Sept. 18. Der Empfänger hat den Bankier beauftragt, 1500 Fr. an Jemanden zu bezahlen.

Juli 25. und Aug. 15. Rimessen auf Paris, d. h. der Empfänger des Contocorrents hat dem Bankier Papier gesandt, das er in Paris und Lyon verkaufen sollte. Für 100 Fr. hat dieser in Paris nur 99, in Lyon aber 100 Fr. erhalten.

Saldo = Ueberschuß der Rechnung oder Betrag der neuen Rechnung, welche am 1. Januar 1865 beginnt.

S. E. et O. = **Salvo errore et omissione**, d. h. Irrthum und Auslassung vorbehalten. Statt dessen schreibt man auch häufig „Irrthum vorbehalten". Man berechne 1) das Capital x. 2) Man setze für y die Summe, von welcher Provision bezahlt wird. Der Bankier berechnet Provision von Allem, was er vorschießt, oder was man bei ihm niederlegt, nicht aber von dem, was man rückbezahlt, oder was er rückzahlt. Er berechnet keine Provision vom Saldo der vorigen Rechnung, weil er sie bereits in dieser Rechnung berechnet hat. Er berechnet keine Provision auf der Haben-Seite von 1350 Fr., weil die ersten 1350 Fr. der Soll-Seite angesehen werden können als Rückzahlung des Saldo. Er berechnet Provision von den folgenden Capitalien auf der Soll-Seite, nicht aber von den kleineren Summen (der Courtage, dem Porto), den Posten, die mit „franco Provision" bezeichnet sind, oder von denen schon Provision bezahlt worden ist. Eine gleiche Summe ist auf der Haben-Seite wieder frei von Provision, als Rückzahlung an den Bankier. Ist auf dieser

Seite aber eine höhere Summe von Capitalien, so wird von diesem Ueberschuß wieder Provision bezahlt. Daher die Regel, daß die Provision von der größern der Summen der beiden Seiten nach Abzug des Saldo berechnet wird. c) Man setze für z die Courtage, welche nur von den Posten berechnet wird, für welche die Vermittelung eines Mäklers nöthig war; in vorliegendem Falle bloß von den Posten vom 25. Juli und vom 15. August. Sie wird nach dem Verkaufspreis der Papiere berechnet. d) Man berechne die Tage, während welcher jedes Capital Zinsen trägt und schreibe diese Zahlen in die entsprechenden Columnen ein. [1 Jahr = 360 Tage, 1 Monat = 30 Tage], e) Man berechne die Zinszahlen [vgl. Aufg. 9.,] und trage sie in die betreffenden Columnen ein. f) Man vergleiche die Zinszahlen der beiden Seiten, ziehe die kleinere von der größern ab und schreibe die Zinsen, welche diesem Reste der Zinszahlen entsprechen, auf die Haben- oder Soll-Seite an, je nachdem die Zinszahl der Haben- oder Soll-Seite die größere war. e) Auf der entgegengesetzten Seite schreibe man zur Probe der Rechnung unter dem Namen „Ausgleichung der Zinszahlen", den Rest der Zinszahlen in die Columne der Zinszahlen. f) Man berechne nun den Betrag der beiden Seiten, ziehe den kleinern von dem größern ab, und schreibe diesen Rest als Saldovortrag für die Rechnung des folgenden Halbjahres auf die betreffende Seite an. g) Zur Probe setze man auch diesen Saldo auf die entgegengesetzte Seite, und addire dann die Capitalien und die Zinszahlen der beiden Seiten.

24. In ähnlicher Weise folgendes Conto-corrent aufzustellen:

Aussteller des Conto-corrents: D. Degers, Berlin.

Empfänger „ „ R. Sickel, Magdeburg.

Tag des Abschlusses: 30. Juni 1865.

Zinsen 6 % [Jahr = 365 Tage. Monate nach Kalender].

Provision ½ %. Courtage [nur von den Rimessen auf fremde Städte] 1%. Porto und Stempel 2 Thlr. 10 Sgr.

Sollseite:

1865. Januar 1. Saldo p. 31. Dez. 1862. 527 Thlr. 15 Sgr.

„ 9. Ihre Tratte %6. Himm p. 16. Febr. 200 Thlr.

Febr. 8. Meine Rimesse auf Bremen p. 8. Febr. 946 Thlr. 18 Sgr.

März 11. Meine Zahlung an L. Lines 214 Thlr. 16 Sgr.

April 8. Meine Rimesse auf Paris p. 8. April 800 Thlr. 20 Sgr.

Mai 6. Meine Baarsendung 1200 Thlr.

Juni 1. Ihre Tratte o/C. Rhines p. 15. Juni 150 Thlr.

Habenseite:

1865. Januar 1. Ihre Baarsendung 500 Thlr.

Febr. 8. Ihre Rimesse auf hier p. 15. April 300 Thlr.

März 10. Ihre Zahlung von Keles 200 Thlr.

April 23. Ihre Rimesse auf Leipzig p. 25. April 1150 Thlr.

Mai 10. Ihre Rimesse auf hier p. 10. Juli 352 Thlr. 10 Sgr.

Juni 6. Ihre Rimesse auf London p. 16. Juni 1500 Thlr.

25. Jemand, der 2000 Fr. schuldig ist am 1. Januar, bezahlt an dem Tage nur 400 Fr.; den 1. März bezahlt er 300 Fr., den 1. Mai abermals 300 Fr., den 1. Juni 500 Fr., den 1. October 100 Fr. und den 1. December will er abrechnen und den Rest bezahlen. Wieviel ist er schuldig, wenn die Zinsen zu 5 % berechnet werden?

Diese Rechnung mache man auf zwei Weisen. a) Man berechne zuerst die Zinsen von 2000 Fr. vom 1. Januar bis zum 1. März, dann die Zinsen von 1600 Fr. [da das Capital um 400 Fr. vermindert wurde] vom 1. März bis zum 1. Mai, dann die von 1300 Fr. vom 1. Mai bis zum 1. Juni, u. s. w. b) Am 1. Dec. ist man schuldig 2000 Fr. mit den Zinsen vom 1. Januar bis zum 1. Dec., dagegen hat man zu gut 400 Fr. mit den Zinsen vom 1. Jan., 300 Fr. mit den Zinsen vom 1. März u. s. w.

26. Eine Person, welche 1200 Fr. am 1. Januar schuldet, bezahlt am Ende jedes Monates 100 Fr.; wieviel Zinsen schuldet sie noch am 31. Decbr., wenn diese zu $4\frac{1}{2}$ % berechnet werden?

27. Man kann auch im Conto-corrent, Aufg. 23., die Columnen der Tage und Zinszahlen auslassen und die Zinsen in einer besondern „Zinsnota", welche dem Ct. Ct. beigelegt wird, nach der realischen Rechnung [Stufenleiter oder Staffelrechnung] berechnen. Am einfachsten verfährt man dabei, wenn man die Capitalien der Soll- und Haben-Seite nach der Verfallzeit ordnet, jene mit S. [oder D.] diese mit H. [oder C.] bezeichnet. Je zwei untereinander stehende S.-Posten oder H.-Posten werden addirt, und in ersterm Falle die Summe mit S., in letzterem mit H. bezeichnet; ungleich benannte

Posten werden subtrahirt und die Differenz mit dem Namen des größern Postens bezeichnet, so daß die Summe mit dem **rohen Saldo** [Differenz der Capitalien] schließt. Dann berechnet man die Zinsen des ersten Postens vom Ausgangstage bis zur Verfallzeit des nächsten Postens und trägt sie in die entsprechende Columne der Zinsen oder Zinszahlen ein. Ebenso berechnet man die Zinsen der folgenden Summe oder Differenz, bis man endigt mit der Berechnung der Zinsen des rohen Saldos bis zur Abschließung des Contocorrents; dann zieht man die Zinsen oder Zinszahlen der Haben- oder Soll-Columne von einander ab und trägt den Zinsen- oder Zahlensaldo zur Ausgleichung in die entgegengesetzte Columne ein. — Man ergänze nach Aufgabe 23 folgende

Zinsnota

für Herrn **C. E. Lepont** u. **Cie** in Luxemburg.

Capitalien.		Tage.	Zinsen à 5 %.	
			Sollen.	Haben.
S. 1350 Fr. **H.** 1200 Fr.	V. 30. Juni bis 15. Juli	15		
S. 150 Fr. **H.** 4455 Fr.	V. 15. Juli bis 10. Aug.			
H. 4305 Fr.	V. 10. Aug. bis 15. Aug.			

28. Man berechne obige Zinsnota, indem man in die vierte Columne, statt der Zinsen zu 5 %, die Zinszahlen einträgt.

29. Man berechne ebenfalls nach der Staffelrechnung den Ct.-Ct. von Aufgabe 24.

30. Will der Bankier von den bei ihm niedergelegten Geldern, welche er zu verzinsen hat, neben der Provision noch Nutzen ziehen, so muß er höhere Zinsen verlangen von dem Gelde, das er ausleiht, als er gewährt von den Summen, die man bei ihm niederlegt. — Wieviel beträgt in folgendem Ct.-Ct. der Saldo am 1. Januar, **a**) wenn gegenseitig 5 % Zinsen gerechnet werden; **b**) wenn dem Contocorrentempfänger für das, was er im Laufe der Rechnung zu gut hat 3 % Zinsen bezahlt, ihm dagegen für das, was er schuldet 6 % zu Last geschrieben werden; **c**) wenn dem Empfänger für das, was

er im Laufe der Rechnung zu gut hat, nichts vergütet, dagegen für das, was er schuldet $4\frac{1}{2}$ % Zinsen berechnet werden? (1 Monat = 30 Tage.)

Aussteller. B. Schneider aus Luxemburg. Empfänger C. Paul in Trier. Provision $\frac{1}{4}$ %. Courtage 1 ‰. Porto und kleine Kosten 15 Fr.,75.

Sollseite.

Juli 15.	Ihre Tratte */A. p. 10 Juli	900 Fr.
Juli 20.	Meine Rimesse auf Paris p. 20. Juli . .	1135 Fr.,45.
Aug. 10.	Eisenbahn-Obligationen fco. Prov. p. 20 Aug.	1225 Fr.
Sept. 15.	Meine Zahlung an B. p. 15. Sept. . .	750 Fr.
Nov. 10.	Meine Rimesse auf Paris p. 1. Dec. . .	826 Fr.

Habenseite.

Juli 1.	Saldo p. 30. Juni	800 Fr.
Aug. 5.	Ihre Rimesse auf Brüssel p. 10. Aug. . .	960 Fr.
Nov. 10.	Zahlung von A. Fritz hier p. 5 Nov. . .	2400 Fr.
Dec. 2.	Ihre Rimesse auf Antwerpen p. 5. Dec. .	874 Fr.,25.

Anmerkung. Warum ist in den Fällen b) und c) die Staffelrechnung allein anwendbar und die Rechnungsweise einiger Bankiers, welche im vorliegenden Falle die Zinsen der Sollseite zu 6 %, die der Habenseite zu 3 % berechnen, falsch?

31. In welcher Zeit erreichen die Zinsen den Werth des Capitals zu 1 %, zu 2 %, zu 3 %, zu 4 %, zu 5 %, zu $2\frac{1}{2}$ %, zu 6 %,

32. Wieviel Zeit muß dasselbe Capital angelegt werden, um zu 4 % dieselben Zinsen zu ertragen, a) welche es in 4 Jahren zu 5 % erträgt; b) welche es in 8 Monaten zu 3 % erträgt; c) welche es in 12 Tagen zu 6 % erträgt; d) welche es in 28 Tagen zu $3\frac{1}{2}$ % erträgt?

33. Jemand hat ein Haus gekauft für 7100 Fr.; die Kosten der Unterhaltung, Assecuranz 2c. belaufen sich jährlich auf 48 Fr., und das Haus bringt ihm einen vierteljährigen Miethzins von 130 Fr.; zu wieviel % hat er sein Geld angelegt?

34. Man hat eine geliehene Summe mit den Zinsen zu 3 % bezahlt, indem man am Schlusse eines jeden der vier Jahre, welche auf die Anleihe folgten, 280 Franken bezahlte. Wie groß war die Summe?

35. Welche gleiche Summe müßte man am Schlusse von zwei auf-

einanderfolgenden Jahren bezahlen, um eine Schuld von 1290 Thlr. mit den Zinsen à 5% abzutragen?

36. Man hat eine Schuld von 1000 Franken in 3 gleichen jährlichen Raten (Summen) zu bezahlen. Der Gläubiger berechnet die Zinsen zu 4 %; wieviel beträgt die jährliche Rate?

37. Welches Capital trägt zu 5 % in derselben Zeit dieselben Zinsen als 1500 Fr. zu 4 %?

38. Zu wieviel % muß man 810 Franken anlegen, um soviel Zinsen zu bekommen, als wenn man 950 Fr. zu $3\frac{1}{2}$ % ausliehe?

39. Welcher Zeit bedarf man, um bei gleichem Zinsfuße von 350 Fr. so viel Zinsen zu bekommen, als von 520 Fr. in 10 Monaten?

40. Um wieviel % vom Capital werden beim Zinsf. von 4%, und 5% die Zinsen erhöht, wenn man bei Berechnung der Tage, die Monate berechnet zu soviel Tagen, als sie nach dem Kalender haben, und das Jahr nur zu 360 Tagen annimmt?

41. Hat man Vortheil oder Nachtheil dabei, wenn man bei einem Bankier, der 3 % Zinsen gibt und $\frac{1}{2}$ % Provision rechnet, ein Capital für 1, $1\frac{1}{2}$, 2 Monate auf Zinsen anlegt?

Rabatt- oder Discontrechnung.

186. **Discont**[1]) heißt der Rabatt, der einem Schuldner gewährt wird von einer Summe, welche er vor der Verfallzeit bezahlt. Derselbe wird bei Wechseln gewöhnlich berechnet nach jährlichen oder nach monatlichen Procenten, bei Waaren gewöhnlich nach Procenten für die ganze Verfallzeit. Es hängt von der Uebereinkunft ab, ob der Rabattfuß Procente des ganzen Betrages der später verfallenden Schuld, resp. des Wechsels, oder ob er Procente der baar zu bezahlenden Summe (des jetzigen Werthes des Wechsels oder der Schuld) bezeichnet. In ersterem Falle gehen, bei einem Discont von 6 %, auf 100 Fr. des Betrages der später verfallenden Schuld 6 Fr. ab, d. h. 100 Fr. dieses

[1]) Franz. escompte.

Betrages haben jetzt einen Werth von 94 Fr. Dieser Discont heißt **Discont von hundert.** In letzterem Falle werden auf 100 Franken, die jetzt bezahlt werden, 6 Fr. nachgelassen, d. h. mit 100 Fr. bezahlt man jetzt 106 Fr., oder auf 106 Fr. des später verfallenden Betrages werden 6 Fr. nachgelassen. Dieser Discont heißt ein **Discont auf hundert.** (Vergl. 172.) Wenn der Discont als Zins mit Berücksichtigung der Zeit berechnet wird, so ist die Berechnung auf 100 allein richtig; doch ist die Berechnung von 100 allgemein üblich, weil sie einfacher ist, und gewöhnlich nur für kurze Verfallzeiten (meist nur für wenige Monate) discontirt wird, für welche der Unterschied nicht sehr bedeutend ist.

187. Aufgabe 1. Welches ist bei einem Discont von 5 auf 100 der jetzige Werth einer nach $4^1/_4$ Jahr verfallenden Schuld im Betrage von 1212Fr.,50?

Auflösung. 1000 Fr. Siehe Nr. 185.

188. Aufgabe 2. Welches ist bei einem Discont von 5 von 100 der jetzige Werth einer nach $4^1/_4$ Jahr verfallenden Schuld im Betrage von 1212Fr.,50?

Auflösung. Ein Discont von 5 % per Jahr macht für $4^1/_4$ Jahr einen Discont von $21^1/_4$ %.

1 %	von 1212Fr.,50	=	12Fr.	,125.
$^1/_4$ %	—	=	3	,031.
10 %	—	=	121	,25.
10 %	—	=	121	,25.
$21^1/_4$ %	—	=	257	,66.

Der Discont beträgt also 257Fr.,66 und der jetzige Werth der Schuld 1212Fr.,50—257Fr.,66 = 954Fr.,84.

189. Die erste Berechnung (auf 100) ist die richtige, denn 1000 Fr. baar entspricht bei einem Zinsfuße von 5

% der nach 4¼ Jahre zahlbaren Summe von 1212Fr.,50. Die zweite Berechnung ist unrichtig. Wer baar, statt nach 4¼ Jahr, 1212Fr.,50 erhält, ist beim Zinsfuß von 5 % schuldig, dafür nach 4¼ Jahr 257Fr.,66 zu vergüten, was mit der obigen Rechnung übereinstimmt, da 1212Fr.50, welche jetzt bezahlt werden, nach 2¼ Jahre zu 5 % an Zinsen 257Fr.,66 ertragen. Vergütet er aber (nach der zweiten Aufgabe) baar 257Fr.,66, so bezahlt er zu viel, so viel als die Zinsen von 212Fr.,50 in 4¼ Jahr betragen. Da jedoch in der Regel nur für kürzere Zeitfristen discontirt wird, so ist der Unterschied zwischen dem richtigen Discont auf 100 und dem kaufmännischen Discont von 100 verhältnißmäßig sehr unbedeutend.

Aufgaben.

1. Jemand hat 1280 Fr. zu bezahlen den 1. November 1865 — 350 Fr. den 7. December 1865 — 275 Fr. den 1. Januar 1866 und 900 Fr. den 1. Juni 1866. Wieviel beträgt der Discont auf hundert à 5 %, wenn er seine Schulden abtragen will den 1. Juli 1865? (Jeden Monat zu 30 Tagen.)

2. Ein Schuldner will am 1. Mai 1865 seine Rechnung mit seinem Gläubiger schließen. Er schuldete 1000 Fr., die zu zahlen waren am 1. Januar 1865, 1000 Fr., zahlbar am 1. September 1866 und 1000 Fr., zahlbar am 1. Februar 1866. Wieviel Zinsen à 5 % werden den Capitalien zugefügt, und wieviel Discont à 5 % geht davon ab, wenn dieser von 100 berechnet wird? (Jeder Monat = 30 Tage.)

3. Auf einer (Wechsel-) Bank bezahlt man einem Kaufmann baar am 25. Januar folgende Wechsel (Schuldverschreibungen eines Dritten) mit einem Discont von 6 % auf hundert.

500 Fr.	zahlbar den	25. Februar.
600 Fr.	—	1. März.
900 Fr.	—	3. Juni.

Man berechnet jeden Monat zu so viel Tagen, als er hat, und das Jahr zu 360 Tagen; wieviel erhält der Kaufmann?

4. Wieviel beträgt am 1. August der Discont à 6 % von 100 einer am 10. October verfallenden Schuld im Betrage von 26280 Thaler, wenn man

a) das Jahr berechnet à 365 Tage, und jeden Monat zu so viel Tagen, als er hat;

b) jeden Monat berechnet à 30 Tage;

c) das Jahr à 360 Tage, und jeden Monat zu soviel Tagen, als er hat, berechnet?

5. Wieviel muß ein Bankier einem Kaufmann am 10. Januar baar bezahlen für folgende Wechsel: 2000 Fr. — p. 15. Januar;
5000 Fr. — p. 1. Februar;
1000 Fr. — p. 10. März;
8500 Fr. — p. 25. Oktober;

beim Discontfuße von $6\frac{1}{2}$ % von 100

a) wenn er das Jahr zu 365 Tagen berechnet, und $\frac{1}{3}$ % (vom Betrage des Wechsels) für Provision rechnet;

b) wenn er jeden Monat zu 30 Tagen und die Provision à $\frac{1}{4}$ % berechnet;

c) wenn er das Jahr berechnet zu 360 Tagen und jeden Monat zu so viel Tagen, als er hat, und $\frac{1}{2}$ % Provision zieht?

6. Wenn sich in einem Conto-corrent auf der Haben- oder Soll-seite Posten finden, welche erst nach dem Abschlusse des Ct.-ct. zahlbar sind, so berechnet man den Discont (oder die Discontzahlen) dieser Summen bis zum Abschlußtage der Rechnung und trägt das Resultat dieser Rechnung mit rother oder blauer Tinte in die Columne der Zinsen (oder der Zinszahlen) ein. Da aber ein Discont auf der Sollseite ein Guthaben und ein Discont auf der Habenseite eine Schuld ist, so werden die rothen oder blauen Zahlen nicht mit den andern derselben, sondern zu denen der entgegengesetzten Seite addirt, oder, was auf dasselbe hinausläuft, man zieht die kleinere dieser Zahlen von der größern ab und schreibt die Differenz auf der Seite der kleinern an. Man fertige ein Ct.-ct. aus, nach folgenden Angaben:

Empfänger. J. Schmit in Luxemburg.

Aussteller. T. Hech in Antwerpen.

Tag des Abschlusses. 30. Juni 1865.

Zinsen à 6 %. (1 Monat = 30 Tage).

Sollseite.

1865. Jan. 1. Saldovortrag 750Fr.,50 p. 31. December 1864.
Febr. 20. Waaren 400 Fr. p. 20. Mai.
März 16. Waaren 650Fr.,25 p. 15. Juni.
Mai 6. Waaren 322Fr.,65 p. 6. August.
Juni 4. Waaren 310Fr.,35 p. 4. September.

Habenseite.

1865. Jan. 1. Für Cassa (d. h. baar bezahlt) 600 Fr.
Febr. 8. Für Wechsel — 700 Fr. p. 1. März.
März 10. Für Cassa — 500 Fr.
Juni 20. Für Wechsel — 600 Fr. p. 15. Juli.

7. Um die rothen Zahlen zu vermeiden und um die Rechnung zum Theile schon in die Bücher eintragen zu können, ehe man bestimmt den Tag des Rechnungsabschlusses kennt, berechnet man mitunter das Conto-corrent, als wäre es an dem Tage abgeschlossen, an welchem zuerst ein Posten der Soll- oder Habenseite verfällt. Wird die Rechnung z. B. am 31. Mai abgeschlossen und ist die früheste Verfallzeit eines Postens der 31. December, so wird der Aussteller des Conto für 500 Fr., die er dem Empfänger am 28. Februar vorgeschossen, diesem die Zinsen von 500 Fr. per 2 Monate (eigentl. Discont) zu gute schreiben und dann die 500 Fr. betrachten als ausgezahlt am 31. December; am Schlusse der Rechnung wird er ihm deswegen die Zinsen von 500 Fr. per 5 Monate anrechnen, wodurch genau dasselbe erreicht wird, als wenn er ihm gleich die Zinsen von 500 Fr. per 3 Monate angerechnet hätte. Die Zahlen der Tagecolumne berechnet man also bis zur frühesten Verfallzeit, mit deren Hilfe berechnet man alsdann den Discont (oder die Discontzahlen) der folgenden Columnen. Man rechnet dann die Zinsen der Gesammtcapitalien der Soll- und Habenseite oder vielmehr des rohen Saldo's (des Unterschiedes beider Summen) und schreibt sie unter den Discont der Sollseite, wenn sie wie dieser dem Empfänger zu Gute kommen, und im umgekehrten Falle unter den der andern Seite.

Man fertige nach dieser Methode das Ct.-ct. der vorigen Aufgabe aus, indem man in die Zinscolumne den Discont einträgt.

8. Man stelle ebenfalls nach dieser Methode das Ct.-ct. der Aufgabe 23, Seite 190 auf, indem man in die letzte Columne die Discontzahlen einträgt.

9. In ähnlicher Weise fertige man das Ct.-ct. der Aufgabe 24, Seite 192, für den 10. Juni als Abschlußtag aus.

10. Wieviel betrug eine Schuld, deren Discont zu 5 % von hundert für 1 Jahr 5 Monate 25 Thaler betrug?

11. Wie hoch belief sich eine Schuld, die nach 7 Monaten zahlbar war und nach einem Discont von $4\frac{1}{2}$ % auf 100 noch 973 Fr.,75 betrug?

12. Wie hoch beläuft sich der Betrag eines nach 7 Monaten 12 Tagen zahlbaren Wechsels, für welchen man nach einem Discont von 6 % von 100 und nach Abzug von $\frac{1}{2}$ % Provision jetzt 239 Thlr. 2 Sgr. erhält? (Monat = 30 Tage. Jahr = 360 Tage.)

13. Ein am letzten December zahlbarer Schuldschein von 1254 Fr. kam im Laufe des Jahres in drei verschiedene Hände. **A** bekam denselben am 15. März, **B** am 10. Juli und **C** am 30. October. Welches war der Werth des Wechsels an diesen drei Tagen, wenn man den Discont zu $4\frac{1}{2}$ % auf 100 berechnet? (Jeder Monat = 30 Tage.)

14. Gewinnt oder verliert man beim Discontfuß von 6 % von hundert, wenn man einen Wechsel von 380 Fr., der in 5 Monaten zahlbar ist, gegen einen Wechsel von 400 Fr., der in 15 Monaten zahlbar ist, austauscht?

15. Bei welchem Discontfuß von hundert hat ein nach 5 Monaten zahlbarer Wechsel von 380 Fr. denselben Werth, wie ein nach 15 Monaten zahlbarer Wechsel von 400 Fr.?

16. Am 1. Februar 1865 wurden drei Schulden, nämlich eine von 8000 Fr. eine andere von 1200 Fr. und eine dritte von 500 Thaler zu $5\frac{1}{2}$ % von 100 discontirt. Der Discont betrug bei der ersten 33 Fr., bei der zweiten 8 Fr.,25, bei der dritten $13\frac{3}{4}$ Thlr. Wann wären sie verfallen? Das Jahr zu 360 Tagen und a) jeden Monat zu 30 Tagen, b) jeden Monat zu so viel Tagen zu berechnen, als er hat.

17. Zu welchem Discontfuß a) auf 100 und b) von 100 wurden folgende Wechsel discontirt:

a) 7950 Fr. Der Discont für 3 Mon. 10 Tage betrug 132 Fr.,50.

b) 7950 Fr. Der Discont für 3 Mon. 16 Tage betrug 132 Fr.,50.

c) 900 Guld. Der Discont für 2 Mon. 15 Tage betrug $7\frac{1}{2}$ Guld.

d) 900 Guld. Der Discont für 2 Mon. 18 Tage betrug $7\frac{1}{2}$ Guld. (1 Monat = 30 Tage.)

18. Zu wieviel % auf hundert muß man discontiren, um denselben Discont zu erhalten, den man bekommt, wenn man eine Summe zu 5 % von hundert a) für 1 Monat, b) für 3 Monate, c) für 6 Monate, d) für 1 Jahr, e) für 18 Monate f) für 2 Jahre, g) für 5 Jahre discontirt?

19. Wieviel erhielte man heute, wenn man sich eine Schuld von 1000 Fr., welche nach 15, nach 25, nach 30 Jahren zahlbar wäre, zu 5 % von 100 discontiren ließe?

Zinseszinsrechnung.

190. Die Zinsen erfallen jedesmals nach einem Jahre. Werden sie alsdann nicht bezahlt, sondern am Ende jedes Jahres als neue Schuld zum Capitale gefügt und die Zinsen jedes folgenden Jahres nach diesem neuen Capitale berechnet, so heißen solche Zinsen **zusammengesetzte Zinsen** oder **Zinseszinsen**. Das Civilgesetzbuch erlaubt dem Gläubiger nur Zinseszinsen zu fordern in Folge gegenseitiger Uebereinkunft oder gerichtlicher Forderung. Sie kommen darum selten und kaum anders vor, als bei einigen öffentlichen Einrichtungen. Ihre beste Anwendung bieten die Sparkassen, welche denen, die ihre Ersparnisse in denselben hinterlegen, das Capital mit Zinseszinsen zurückzahlen.

191. **Aufgabe 1. Man sucht die Zinseszinsen** und kennt das Capital = 350 Fr., den Zinsfuß = 4% und die Zeit = 4 Jahre.

Auflösung. 100 Fr. wachsen in 1 Jahr an zu 104 Fr.; 1 Fr. wird $\frac{104}{100}$ Fr. und 350 Fr., werden $\frac{350\times104}{100}$ Fr. am Ende des ersten Jahres.

Diese Summe ist das Capital des 2. Jahres. In demselben wird ebenfalls 1 Fr. $\frac{104}{100}$ Fr. und folglich wird diese Summe am Ende des 2. Jahres $\frac{350\times104\times104}{100\times100}$ Fr.

Dieses ist das Capital des 3. Jahres, und es wird am Ende desselben $\frac{350\times104\times104\times104}{100\times100\times100}$ Fr.

Dieses Capital des 4. Jahres wird am Ende desselben $\frac{350\times104\times104\times104\times104}{100\times100\times100\times100}$ Fr. = 409Fr.,45. Die Zinsen betragen demnach 59Fr.,45.

Anmerkung. Die Zinsen von $4\frac{1}{3}$ Jahre hätte man auf folgende Weise berechnet.

Im ersten Drittel des 5. Jahres werden 100 Fr. $100+\frac{4}{3}$ Fr. $=\frac{304}{3}$; 1 Fr. wird also $\frac{304}{300}$ und obige Summe, das Capital des 5. Jahres, wird demnach $\frac{350\times104\times104\times104\times104\times304}{100\times100\times100\times100\times300}$=413Fr.,58. Die Zinsen betragen also 63Fr.,58.

192. Aufgabe. 2. Man sucht das Capital, kennt die Zinsen =212Fr.,50, den Zinsfuß =5% und die Zeit $4\frac{1}{4}$ Jahr.

Auflösung. 1 Franke zu 5% ausgeliehen wird nach $4\frac{1}{4}$ Jahr $\frac{105\times105\times105\times105}{100\times100\times100\times100}\times$1Fr.,0125=1Fr.,2307 und bringt also 0Fr.,2307 Zinsen. 212Fr.,50 sind also die Zinsen von 212Fr.,50 : 0,2307=921Fr.,11.

Anmerkung. Den Werth eines Franken nach $4\frac{1}{4}$ Jahr berechnet man am einfachsten auf folgende Weise. 1 Fr. wird nach 2 Jahren $\frac{105\times105}{100\times100}$=1Fr.,1025. In den fol-

genden zwei Jahren wird dieses 1Fr.,1025×1,1025 = 1Fr.,215506. In dem folgenden Viertel-Jahre erträgt 1 Fr.
12155 1¼ Centime. Ich addire also zu obiger
3039 Summe so viel Centimes, als sie Franken

1 ,230700 enthält, + den vierten Theil hievon.

193. Aufgabe 3. Man sucht die Zeit und kennt das Capital = 500 Thaler, den Zinsfuß = 4½ % und die Zinsen = 82 Thlr. 15 Sgr.

Diese Aufgabe kann nicht direct vermittelst der vier Rechnungsarten gelöst werden und gehört darum der elementaren Arithmetik nicht an. Man könnte sie aber finden durch Probieren. 500 Thlr. werden 582 Thlr. 15 Sgr. in derselben Zeit, in welcher 1 Thaler der 500ste Theil von 582 Thlr. 15 Sgr. oder 582½ Thlr. : 500 = 1Thlr.,165 wird.

Durch Rechnungen wie bei obigen Aufgaben findet man, daß der Werth von 1 Thlr. in 1 Jahr steigt auf 1Thlr.,045, in zwei Jahren auf 1Thlr.,092025, in 3 Jahren auf 1Thlr.,141166 und in 4 Jahren auf 1,192519. Die Zeit beträgt also 3 Jahre und so viel Tage, als nöthig sind, damit 1Thlr.,141166 steige auf 1Thlr.,165; oder, daß 1Thlr.,141166 ertrage 0Thlr.,023834. 1 Thlr. erträgt in 1 Tag nach der gewöhnlichen Berechnung $\frac{9}{2\times100\times360}$; 1Thlr.,141166 erträgt in 1 Tag $\frac{9\times1141166}{2\times100\times360}$ Millionstel Thlr.; um 1 Millionstel Thlr. zu erhalten muß man also obiges Capital ausleihen $\frac{2\times100\times360}{9\times1141166}$ Tage, und um 0Thlr.,023834 zu erhalten, muß man dasselbe ausleihen $\frac{2\times100\times360\times23834}{9\times1141166}$ = 167 Tage.

194. Die **Aufgabe 4** (Nr. 185), **durch welche man den Zinsfuß** zusammengesetzter Zinsen **sucht**, kann ebenfalls nicht durch die elementare Arithmetik gelöst werden.

195. **Aufgabe 5. Man sucht das Capital** und die **Zinsen**, und kennt die rückzuzahlende Summe = 1212 Fr.,50, den Zinsfuß = 5% und die Zeit = $4\frac{1}{4}$ Jahr.

Auflösung. 1 Fr. hat nach $4\frac{1}{4}$ Jahren einen Werth von 1 Fr.,2307 (s. Nr. 192). 1 Fr. nach $4\frac{1}{4}$ Jahr hat also jetzt einen Werth von $\frac{10000}{12307}$, und 1211 Fr.,50 nach $4\frac{1}{4}$ Jahr haben heute einen Werth von $\frac{121250 \times 100}{12307}$ = 985 Fr.,21.

196. Die Weise, wie in Anm. zu Nr. 191, die Zinseszinsen von 1 Fr. berechnet worden sind, ist nicht vollkommen richtig. Das Wesen der Zinseszinsrechnung besteht in der Berücksichtigung der Verfallzeit der Zinsen. Wenn nun Jemand 100 Fr. zu 4 % ausleiht und sich dieselben nach $\frac{1}{3}$ Jahr mit $\frac{4}{3}$ Fr. Zinsen zurückzahlen läßt, wenn er alsdann die 100 Fr. wieder ausleiht und sich dieselben nach dem zweiten Drittel des Jahres ebenfalls mit $\frac{4}{3}$ Fr. Zinsen zurückzahlen läßt, und sie dann auch während des letzten Jahresdrittels ausleiht, um sie am Schlusse des Jahres mit $\frac{4}{3}$ Fr. Zinsen einzuziehen, so hat er allerdings nur 4 Fr. Zinsen eingezogen, aber dadurch gewonnen, daß er einen Theil davon vor Ende des Jahres einzog. Da bei der Zinsesrechnung die Zinsen ebenfalls Zinsen tragen, so hätte er die Zinsen von $\frac{4}{3}$ Fr. während 8 und die Zinsen von $\frac{4}{3}$ Fr. während 4 Monaten zu vergüten. Die Berechnung dieser Zinsen enthält aber dieselben Schwierigkeiten, wie die exacte Bestimmung der Zinsen von 100 Fr. für $\frac{1}{3}$ Jahr (nach der Theorie der Zinseszinsen), welche nicht in das Bereich der elementaren Arithmetik gehört.

Obwohl das Gesetz in der Regel dem Gläubiger verbietet erfallene Zinsen zu verzinsen, und mithin die Verfallzeit der Zinsen bei deren Berechnung in der Regel nicht berücksichtigt zu werden braucht, so kann es doch den Schuldner nicht verpflichten, die Zinsen vor der Verfallzeit zu entrichten, d. h. selbst bei Berechnung der einfachen Zinsen à 4 % ist es nicht ganz richtig, daß für 100 Fr. nach 1/3 Jahr 4/3 Fr. zu entrichten sind. Doch hat der Unterschied wenig zu bestellen.

Am meisten wird derjenige, welcher die Zinsen bezahlt, benachtheiligt, wenn man ihn dieselben bezahlen läßt im Anfang statt am Ende des Jahres, wie das bei der üblichen Weise zu discontiren geschieht.

Wenn eine Zinsrechnung am Ende des Jahres (vom Tage der Anleihe an) abgeschlossen wird, und etwa noch fällige Zinsen zum Capitale geschlagen werden, so werden Zinseszinsen berechnet, was sich der Schuldner außer in den gesetzlich vorgesehenen Fällen nicht braucht gefallen zu lassen. Wenn aber, wie es mitunter geschieht, die Rechnung vor Ende des Jahres abgeschlossen wird und die Zinsen zum Capitale geschlagen werden, so berechnet man Zinsen von noch nicht verfallenen Zinsen, was gegen allen Begriff einfacher und zusammengesetzter Zinsrechnung verstößt.

197. Annuitäten heißen Zahlungen, welche ein Schuldner jedes Jahr während einer gewissen Zeit zu entrichten hat. Im gewöhnlichen Leben kommen sie vor, wenn Jemand einer Lebensversicherungsgesellschaft oder einer Person ein gewisses Capital bezahlt, und diese die Verpflichtung übernimmt, ihm lebenslänglich jedes Jahr eine gewisse Summe zu bezahlen, oder wenn umgekehrt eine Person einer Gesellschaft jedes Jahr eine gewisse Summe bezahlt und diese die Verpflichtung übernimmt, beim Tode jener Person ein bestimmtes Capital an deren Erben zu bezahlen, oder wenn Jemand eine Anleihe macht, die er durch eine bestimmte Anzahl von jährlichen gleichen

Zahlungen mit den Zinseszinsen zurückzahlt. Die beiden ersten Fälle unterscheiden sich vom letzten nur dadurch, daß die Zahl der Annuitäten nach der muthmaßlichen Zahl von Jahren, die Jemand noch erleben kann, berechnet wird.

198. Aufgaben. A ist schuldig am 1. März der sechs Jahre 1865—1870 1 Franken zu bezahlen; wieviel muß er mit Berücksichtigung der Zinseszinsen zu 5 % bezahlen, 1) wenn er diese Schuld ganz hätte abtragen wollen am 1. März 1865; 2) wenn er sie ganz hätte abtragen wollen am 1. März 1864?

Auflösung der Aufgabe 1. 1 Fr., bezahlt den 1. März 1865, ist werth den 1. März 1865 1 Fr.

1 Fr., b. d. 1. M. 1866, i. w. a. 1. M. 1865				$\frac{100}{105}$ Fr.
1	—	1867	—	$\frac{100\times100}{105\times105}$ Fr.
1	—	1868	—	$\frac{100\times100\times100}{105\times105\times105}$ Fr.
1	—	1869	—	$\frac{100\times100\times100\times100}{105\times105\times105\times105}$ Fr.
1	—	1870	—	$\frac{100\times100\times100\times100\times100}{105\times105\times105\times105\times105}$ Fr.

Man hat also diese sechs Summen auszurechnen und zu addiren, um den Werth der Schuld am 1. März 1865 zu finden.

199. Auflösung der Aufgabe 2.

1 Fr., b. d. 1. M. 1865, i. w. d. 1. M. 1864				$\frac{100}{105}$ Fr.
1	—	1866	—	$\frac{100\times100}{105\times105}$ Fr.
1	—	1867	—	$\frac{100\times100\times100}{105\times105\times105}$ Fr.
1	—	1868	—	$\frac{100\times100\times100\times100}{105\times105\times105\times105}$ Fr.
1	—	1869	—	$\frac{100\times100\times100\times100\times100}{105\times105\times105\times105\times105}$ Fr.
1	—	1870	—	$\frac{100\times100\times100\times100\times100\times100}{105\times105\times105\times105\times105\times105}$ Fr.

Den Werth der Schuld am 1. März 1864 findet man also, wenn

man diese sechs Zahlen ausrechnet und dann addirt. Man kann aber diesen Werth auch aus dem obigen herleiten.

Der Werth der erstern Annuitäten übertrifft den der letztern Annuitäten um 1 Fr. — $\frac{100\times100\times100\times100\times100\times100}{105\times105\times105\times105\times105\times105}$ Fr.

Da jede dieser Annuitäten $\frac{100}{105}$ der entsprechenden Annuität der Aufgabe 1 ist, so übertrifft der Werth der erstern den der andern um $\frac{5}{105}$ des letzteren Werthes. $\frac{5}{105}$ des Werthes dieser Annuitäten sind demnach Fr. 1 — $\frac{100\times100\times100\times100\times100\times100}{105\times105\times105\times105\times105\times105}$ Fr. Man findet also auf leichtere Weise deren Werth, indem man den jetzigen Werth der sechsten Annuität von 1 Fr. abzieht und davon $\frac{105}{5}$ nimmt. Ebenso findet man im Allgemeinen den jetzigen Werth von 4, 9, 12 Annuitäten von 1 Fr. oder 1 Thaler oder irgend einer Summe, von denen die erste nach 1 Jahr erfällt, indem man den Werth der letzten Annuität von dem Betrage einer Annuität abzieht und diesen Rest multiplizirt mit einem Bruche, der zum Nenner den Zinsfuß hat und zum Zähler eine Zahl, die um 100 Einheiten stärker ist als der Nenner.

200. Aufgabe 3. Jemand hat 5 Jahre lang jährlich 500 Fr. zu bezahlen; welche Summe muß er ein Jahr vor der Verfallzeit der ersten Annuität erlegen, um mit Berücksichtigung der Zinseszinsen zu 4% seine Schuld abzutragen?

Auflösung. Der jetzige Werth der letzten Annuität beträgt $\frac{500\times100\times100\times100\times100\times100}{104\times104\times104\times104\times104}$ Fr. $=410$ Fr.,963. Der Betrag einer Annuität weniger diesen Werth macht 89 Fr.,037; der jetzige Werth aller Annuitäten macht also 89 Fr.,037 $\times {}^{104}/_{4} = 2314$ Fr.,96.

201. Aufgabe 4. Jemand leiht eine Summe von 10000 Franken, die er in gleichen Annuitäten mit den Zinseszinsen zu 5% abtragen will; wieviel muß er jedes Jahr bezahlen?

Auflösung. 8 Annuitäten von 1 Fr. sind jetzt werth $\frac{105}{5}$ von

$\left(1-\frac{100.\ 100.\ 100.\ 100.\ 100.\ 100.\ 100.\ 100}{105.\ 105.\ 105.\ 105.\ 105.\ 105.\ 105.\ 105}\right)$ Fr., oder $\frac{105}{5}$ Fr. — $\frac{100\times100\times100\times100\times100\times100\times100\times100}{105\times105\times105\times105\times105\times105\times105\times105}$ Fr. $=21$ Fr. — 14 Fr.,21363 $=$ 6 Fr.,78637. Hat ein Capital von 6 Fr.,78637 jetzt den Werth von 8 Annuitäten von 1 Fr., so hat ein Cap. von 1 Fr. jetzt den Werth von 8 Annuit. von $\frac{100000}{678637}$ Fr. und 10000 Fr. haben den Werth von 8 Annuit. von $\frac{100000\times10000}{678637}$ Fr. $=$ 1473 Fr.,54.

Aufgaben.

1. Wieviel beträgt der Werth
   a) von 500 Fr. mit den Zinseszinsen zu 5% von 3 Jahren;
   b) von 1000 Thlr. mit den Zinseszinsen zu 3% von 4 Jahren;
   c) von 800 öst. Fl. mit den Zinsesz. zu 4% von $2\frac{1}{2}$ Jahre;
   d) von 1500 Fr. mit den Zinsesz. zu $3\frac{1}{2}$ % von $3\frac{1}{4}$ Jahr?
2. Man suche das Capital, welches
   a) nach 3 Jahren mit den Zinsesz. à 4% einen Werth hat von 1000 Fr.
   b) nach $4\frac{3}{4}$ Jahre mit den Zinseszinsen à $3\frac{1}{2}$ % einen Werth hat von 1200 Thlr.
3. Von welchem Capital betragen die Zinseszinsen
   a) zu 5% nach 5 Jahren 1200 Thlr.
   b) zu 4% nach 6 Jahren 4500 Fr.
   c) zu 6% nach 4 Jahren 1800 öst. Fl.?

4. Ein eben erst behauener Holzschlag (Theil eines Waldes) von 10 Hektares wird nach 20 Jahren per Are 2 Stères Holz à 8 Fr.,40 geben. Wieviel ist er demnach werth? Man nimmt an, daß Wälder 4% ertragen sollen. (Man berechne das Capital, das nach 20 Jahren zu 4% obigen Ertrag an Zinseszinsen bringen wird.)

5. Wieviel ist derselbe Holzschlag werth mit zweijährigem Nachwuchse; oder welches ist der Werth obigen Capitales mit den Zinseszinsen à 4% von zwei Jahren?

6. Jemand hat bei einem Wucherer 5500 Franken geliehen zu 8% und 6 Jahre lang die Zinsen richtig bezahlt. Das Gericht verurtheilt den Wucherer, die Zinsen zu 5% zu berechnen und das jedes

Jahr zu viel Bezahlte vom Capitale abzuziehen. Wieviel hat der Schuldner am Ende des 6. Jahres, nachdem er seine Zinsen zu 8°/₀ bezahlt, noch zu entrichten? (Kann auf zwei Weisen berechnet werden).

7. Am 1. Jan. 1865 hat Jemand 900 Fr. zu fordern; er erhält den 1. Juni 540 und den 1. Oct. 120 Fr. Die Rechnung mit 5°/₀ Zinsen kann vom Gläubiger am 1. Jan. 1866 auf verschiedene Weisen aufgestellt werden.

Erste Weise. (Vgl. Aufg. 25, Seite 193).

Sollen. 900 Fr. Zinsen vom 1. Jan. 65. — 1. Juni 18 Fr.,75
Haben. 540 Fr.

Sollen. 360 Fr. Zinsen vom 1. Juni. — 1. Oct. . . 6 ,00
Haben. 120 Fr.

Sollen. 240 Fr. Zinsen vom 1. Oct. — 1. Jan. 66. 3 ,00
— 27,75 .... Zinsen 27 ,75

Sollen. 267,75. Saldo am 1. Jan. 1866.

Zweite Weise.

Sollen.

900 Fr. Zinsen vom 1. Jan. 66 .... 45 Fr.

Haben.

540 Fr. Zinsen vom 1. Juni 65 — 1. Januar 66 . . 15 Fr.,75
120 Fr. Zinsen vom 1. Oct. 65 — 1. Januar 66 . . 1 ,50
240 Fr. Saldo des Capitals ....
Saldo der Zinsen .... 27 ,75
900 Fr. 45 Fr.

Das Sollsaldo beträgt demnach 240 Fr. + 27 Fr.,75 = 267 Fr.,75.

Dritte Weise. Man betrachtet alle Zahlungen, als wären sie am 1. Januar 65 gemacht worden. Der Gläubiger berechnet dann dem Schuldner den Discont für die später gemachten Zahlungen und die Zinsen eines Jahres für den noch nicht erlegten Theil der Schuld. (Siehe Aufg. 7, Seite 290.)

S. 900 Fr.
H. 540 Fr. Discont vom 1. Juni 65 — 1. Jan. 65. 11 Fr.,25
H. 120 Fr. Discont vom 1. Oct. 65 — 1. Jan. 65 . 4 ,50
S. 240 Fr. Zinsen vom 1. Jan. 65 — 1. Jan. 66. . 12 ,00
S. 27 ,75.

Vierte Weise, (nicht üblich). Der Gläubiger berechnet den Werth der verschiedenen Zahlungen für den 1. Januar 1865 nach der richtigen Discontrechnung (auf 100), findet dann (durch eine Subtraction) den Werth der Schuld am 1. Januar 65 und schlägt dazu die Zinsen für 1 Jahr.

Sollen (a. 1. Jan. 65) .	900 Fr.		
Haben (a. 1. Jan. 65) .	528,98.	Discontirte Zahlung vom 1. Juni.	
. . . .	115,66.	Discontirte Zahlung vom 1. Oct.	
Sollsaldo (1. Jan. 65) .	255,36.	Sollen am 1. Jan. 65 .	255 Fr. 36
		Zin. v. 1. J. 65—1. J. 66.	12 ,77
	900 Fr.	Saldo am 1. Jan. 66. .	268 ,13

Fünfte Weise. Bei jeder Zahlung berechnet der Gläubiger die Zinsen und schließt die Rechnung ab, um für die folgende Zeit das Capital zu finden.

Geliehen den 1. Januar 1865.	900 Fr.
Zinsen vom 1. Januar — 1. Juni	18,75
	918,75
Bezahlt den 1. Juni	540,00
Bleibt	378,75
Zinsen davon vom 1. Juni — 1. October . .	6,31
	385,06
Bezahlt den 1. October.	120,00
Bleibt	265,06
Zinsen davon vom 1. Oct. 65 — 1. Jan. 66.	3,31
Macht am 1. Januar 66.	268,37

Man weise nach, 1° daß die drei ersten Weisen sich im Grunde nicht von einander unterscheiden und darum dasselbe Resultat geben müssen; 2° daß sie der üblichen Weise, die Zinsen für Monate zu berechnen, allein entsprechen; 3° daß, insofern sie mathematisch nicht ganz richtig sind, diese Unrichtigkeit in vorliegendem Falle dem Schuldner zum Vortheil gereicht (im Allgemeinen demjenigen, dessen Guthaben für Brüche von einem Jahre berechnet wird); 4° daß die vierte Weise der üblichen Weise die Zinsen für Monate zu rechnen nicht entspricht, mathematisch genommen jedoch nicht unrichtiger ist, als die

vorige [1]), und daß ihre Unrichtigkeiten in vorliegendem Falle dem Gläubiger zum Vortheile gereichen müssen; 5° daß die fünfte Weise, welche mitunter angewendet wird, den Begriffen der Zinsrechnungen widerspricht, und ein Schuldner thöricht handelt, wenn er sich dieselbe gefallen läßt.

8. Am 1. Mai 1864 schuldete Jemand 6000 Fr.; den 1. Oct. 1864 bezahlt er 1200 Fr., den 1. Febr. 1865 wieder 3000 Fr., und den 1. Mai 1864 den Rest mit den Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ %. Sein Gläubiger macht die Rechnung nach der 5. Weise (siehe vor. Aufg.); der Schuldner aber stellt sie auf nach einer der drei ersten Weisen; wieviel wird er von der Rechnung des Gläubigers abziehen dürfen?

9. Jemand hat eine Schuld von 10000 Fr., welche den 1. Jan. 1864 verfiel. Er bezahlte am 1. Febr. 3000 Fr.; am 1. April 1000 Fr.; am 1. Mai 1500 Fr.; am 16. Juni 3000 Fr.; am 1. Jan. 1865 wieder 600 Fr., und verlangt abzurechnen am 1. Febr. 1865. Man stelle die Rechnung mit den Zinsen à 5 % nach obigen fünf Weisen auf.

10. A leiht dem B am 1. Mai 1861 die Summe von 4000 Fr. zu 4% Zinsen. B bezahlt 1000 Fr. am 1. Mai eines jeden der drei folgenden Jahre, und will abrechnen am 1. Mai 1865. Man stelle diese Abschlußrechnung auf nach der fünften Weise. Warum ist dieselbe in diesem Falle gerecht?

11. Man stelle dieselbe Rechnung auf nach der ersten und zweiten Weise, aber mit Berechnung der Zinseszinsen statt der einfachen Zinsen. Warum gibt diese Rechnung dasselbe Resultat, wie die vorige? Und warum verstößt diese Rechnung mit Zinseszinsen nicht gegen das Gesetz, welches Zinseszinsen verbietet?

12. Jemand ist 4000 Fr. schuldig am 1. Jan. 1864 und bezahlt 1000 Fr. am 1. Jan. 1865, 1000 Fr. am 1. März 1865 und 1000 Fr. am 1. Juli 1865, und will am 1. Oct. 1865 abrechnen; die Zinsen sind 5%. Hier kann der Gläubiger die erste Zahlung nach der fünften Weise verrechnen, die andern aber nicht; warum? wie lautet der Rechnungsabschluß?

13. Wenn man einem Gläubiger, der den Gebrauch hat, nach

[1]) Dem exacten Resultat, das man findet, wenn man die Verfallzeit der Zinsen genau berücksichtigt, kommt man sogar durch diese Weise um etwas sehr weniges näher.

der fünften Weise zu rechnen 10000 Fr. am 1. Januar schuldete, wieviel beträgt dessen Rechnung mit 5% Zinsen am 1. Januar des folgenden Jahres, a) wenn man am 1. Juli 5 Fr. b) wenn man nichts während des Jahres bezahlt hat?

14. Die Sparkasse bezahlt nach der jetzigen Bestimmung der Regierung 4% Zinsen von Summen im Betrage von 1—500 Franken; $3\frac{1}{2}$ % für die folgenden 500 Franken, und keine Zinsen von weiteren Einlagen oder Guthaben. Sie berechnet diese Zinsen nach Monaten und zählt die Tage des Monates, in welchem eine Einlage oder eine Rückzahlung gemacht wird, bei der Berechnung der Zinsen dieser eingelegten oder rückgezahlten Summe nicht mit. Ebenso werden keine Zinsen von den Bruchtheilen eines Franken gerechnet. Die Zinsen werden am 31. December zum Capitale des folgenden Jahres geschlagen. Wieviel kann demnach am 1. Jan. 1866 derjenige wieder erhalten, welcher 1862 den 20. Jan. eingelegt hat 50 Fr.; den 18. Juli 30 Fr.; 1863 den 27. März 20 Fr.; den 19. August 25 Fr.; 1864, den 1. Mai 80 Fr., den 1. Oct. 10 Fr., den 1. Nov. 40 Fr.; 1865, den 30. April 80 Fr., den 30. Sept. 10 Fr.; den 31 Oct. 40 Fr.?

15. Wieviel beträgt die Rechnung der Sparkasse am 1. Mai 1866 für folgendes Livret (Verzeichniß der Einlagen und Rückzahlungen).

Einlagen.	Rückzahlungen.
250 Fr. Jan. 1862.	50 Fr. Juli 1864.
100 Fr. Febr. 1863.	40 Fr. Sept. 1864.
80 Fr. März 1863.	30 Fr. Nov. 1865.
20 Fr. Jan. 1864.	100 Fr. März 1866.
130 Fr. Oct. 1864.	
150 Fr. Mai 1865.	
200 Fr. Febr. 1866.	

16. Wieviel erhält Jemand nach 5, nach 10 und nach 20 Jahren, der im December jeden Jahres 30 Fr. auf die Sparkasse legt?

17. (197) Jemand leiht 5000 Fr., die er in 5 gleichen Annuitäten mit den Zinseszinsen zu 4 % abtragen will. Wieviel wird eine Annuität betragen?

18. Welches ist, mit Berücksichtigung der Zinseszinsen à 5 %, der jetzige Werth von 8 Annuitäten von 200 Fr., von denen die erste über ein Jahr bezahlt wird?

19. Wieviel beträgt, mit Berücksichtigung der Zinseszinsen zu $3\frac{1}{2}$ %, der jetzige Werth von vier Annuitäten von 600 Thlr., von denen die erste über ein Jahr erfällt?

20. Man will in 6 gleichen Annuitäten eine jetzt gemachte Schuld von 6000 Thlr. mit Zinseszinsen à 3 % abtragen; wieviel beträgt eine Annuität?

21. Die internationale Bank von Luxemburg macht Darlehen gegen hypothekarische Versicherung. Sie behält 1 % Provision zurück, berechnet die alle sechs Monate zahlbaren Zinsen nach der jetzigen Bestimmung der Regierung zu $4\frac{1}{2}$ % und verlangt, daß bei jeder Zahlung mindestens $\frac{1}{2}$ % des Stammcapitals erlegt werde. Wieviel muß Jemand leihen, der 9900 Fr. braucht, und wie lange hat er an seiner Schuld zu bezahlen, wenn er sie in halbjährigen Raten von 500 Fr. abtragen will?

Das Einfachste über die Berechnung der Staatspapiere und Actien.

202. Unter Staatspapieren (Staatseffekten, Staatsobligationen, öffentlichen Fonds) versteht man vom Staate ausgestellte zinstragende Schuldscheine. Privatobligationen sind ähnliche Papiere, die von Fürsten als Privatpersonen, von Provinzialbehörden oder Körperschaften ausgestellt sind. Diesen Papieren wird gewöhnlich ein Bogen mit Zinsquittungen (Zinsscheinen, Zinsleisten, Coupons) beigegeben, gegen deren Vorzeigung nach Verlauf der darauf vermerkten (halbjährigen oder jährigen Termine) dem Inhaber an den bezeichneten Staatskassen oder Banken die fälligen Zinsen ausbezahlt werden. Wenn die letzte Zinsquittung erfällt, wird gegen Vorzeigung dieses letzten Coupons (Stichcoupons) oder des Talons, einer dem Zinsbogen zur Erhebung eines neuen Zinsbogens beigegebenen Anweisung, ein neuer Zinsbogen eingehändigt. Diese Staatsschulden können nicht eingefordert werden, und die Staats-

papiere verleihen also bloß das Recht zu einer in bestimmten Terminen zu erhebenden Rente. Deswegen werden sie häufig verkauft, wodurch sie Gegenstände des Handels werden. Man unterscheidet darum zwischen ihrem Nominalwerth (dem auf den Papieren vermerkten Darleihen) und ihrem wirklichen Preis zu einer bestimmten Zeit. Staatsunruhen, Unregelmäßigkeiten in der Auszahlung (zeitweise Aussetzungen der Zahlungen, Zahlungen in Papiergeld), welche den Credit eines Staates (das Vertrauen, das man als Gläubiger auf den Staat setzt) vermindern und andere Umstände drücken den Marktpreis der Staatspapiere herunter. Häufig werden auch Schwankungen künstlich durch gewisse Speculationen (Sp. à la hausse oder à la baisse) hervorgebracht (Agiotage). Da auf diese Weise diese Papiere eine Waare geworden sind, so verkauft auch der Staat diese Waare den ersten Darleihern in der Regel nicht zu dem Nominalwerth, sondern zu einem Marktpreise.

203. Manche Staatsanleihen werden auch unter andern Bedingungen gemacht. Der Staat kann z. B. seine Schuld in einer bestimmten Zahl von Annuitäten abtragen (Zeitrenten), oder statt der Zinsen zu gewissen Terminen Gewinnste unter die Darleiher verleihen (Lotterieanleihe) oder nur mäßige Zinsen versprechen und dafür zur Entschädigung Prämien verloosen (gemischte Anleihen).

204. Für manche größere Unternehmungen, wie Eisenbahn-, Kanal-, Schifffahrts-, Bank-, Assecuranz-Unternehmungen, Anlegung großer Fabriken, Ausbeutung von Bergwerken, u. s. w., wird in der Regel eine Gesellschaft zur Beschaffung der nöthigen Capitalien gebildet. Die Urkunden, welche bestimmte Einlagen zu einem solchen Gesellschaftscapitale bescheinigen, heißen Actien, oder, da der

festgesetzte Antheil auch wohl in bestimmte Theile zerlegt wird, **halbe Actien**, **Viertel-Actien**, u. s. w. Diese Actien können auf den **Namen** des Einlegers lauten, oder auf den **Inhaber**; in letzterem Falle berechtigt der Besitz der Urkunde zu allen Vortheilen, welche dem Einleger versprochen sind.

Jeder **Actionär** (Besitzer einer Actie) hat einen verhältnißmäßigen Antheil an dem Vermögen der Actiengesellschaft, so wie einen Antheil an einem vertragsmäßig bestimmten Theile des Gewinnes, welcher **Dividende** heißt. Bei Unternehmungen zum allgemeinen Nutzen werden ihm auch wohl vom Staate feste Zinsen zugesichert, welche dann auch wohl Dividende heißen; sein Antheil an dem Ueberschuß des Reinertrags, welcher vertheilt wird, heißt alsdann **Extradividende**.

Die Actien werden meist nur in bestimmten Theilen und Fristen eingezahlt; gewöhnlich werden nach den ersten Einzahlungen Quittungsbogen, Interimsscheine oder Actienpromessen ausgestellt, welche nach der letzten Einzahlung gegen Actien (Vollactien) umgetauscht werden.

Erweist sich das erste Capital als unzulänglich, so werden oft außer den ursprünglichen Actien (**Stammactien**) neue Actien unter vortheilhafteren Bedingungen für die Actionäre (**Prioritätsactien**) ausgegeben oder es wird eine Anleihe gemacht, wofür Schuldscheine, **Obligationen** (Prioritätsobligationen), ausgestellt werden. Der Preis der Actien hängt vorzüglich von dem glücklichen Erfolge des Unternehmens ab.

205. Der Marktpreis der Staatspapiere und Actien heißt ihr **Curs**. Diese Curse werden in den Börsen (öffentlichen Gebäuden in Handelsstädten, in denen die Kaufleute

ihre Geschäfte abschließen) auf Grund der gemachten Offerten und Geschäfte notirt. (Das Anbieten von Papier zu einem gewissen Preis wird vermerkt unter dem Titel „Papier“; das Anbieten einer gewissen Summe für bestimmte Papiere unter dem Titel „Geld“; abgeschlossene Käufe unter dem Titel „bezahlt“.) Diese Cursnotirungen bilden die Grundlage der hiehin gehörigen Rechnungen. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, diese abgekürzten Cursnotirungen, welche an den verschiedenen Börsen und mitunter für verschiedene Papiere nicht nach denselben Grundsätzen gemacht werden, recht zu verstehen, so wie die abweichenden Usanzen (Handelsgebräuche) der verschiedenen Börsen zu kennen. Der Curs einer Staatsobligation von 500 Fr. kann z. B. angegeben werden a) in Procenten des Nominalwerthes, 75. Ist der Curs in diesem Falle 100 (100 % des Nennwerthes) so sagt man, die fragliche Papiergattung stehe al pari. b) per Stück = 375 Fr.; diese Notirung ist besonders üblich bei Staatspapieren, von denen es nur Stücke gibt von einerlei Betrage. c) in Procenten des Gewinnes oder Verlustes = 25 % Verlust.

Aufgaben.

1. Zu Anfang des Jahres 1859 stellte die Regierung des Großh. Luxemburg 1000 Obligationen (Schuldscheine) aus von 1000 Fr., 4800 von 500 Fr. und 5000 von 100 Fr. à 4 % Zinsen. Sie erhielt dafür $3\frac{1}{2}$ Million Fr. Zu wieviel % des Nominalwerthes fand die Emission (erste Ausgebung) der Obligationen statt?

2. Wieviel mußte man den 1. Januar 1865 (nach Ablösung der an diesem Tage fälligen Zinscoupons) bezahlen für Obligationen der Luxemburger Anleihe von 1859, im Nominalwerth von 5000 Fr.? Ihr Curs stand an diesem Tage à $90\frac{1}{2}$, d. h. für 100 Fr. des Nominalwerthes bezahlte man 90,50.

3. Wieviel kosteten 1500 Fr. in Luxb. Anleihe von 1859 am 12. Jan. 1865 à $90^1/_4$ mit dem Zinscoupon? Der Käufer hat dem Verkäufer die Zinsen à 4% vom 1. bis zum 12. Jan. zu vergüten. (Allerdings mathematisch nicht vollständig richtig, da ein Vortheil der Obligationen nicht gehörig berücksichtigt wird. Dieser besteht darin, daß früher oder später, je nach den Chancen der Verloosung, die Obligationen zu ihrem vollen Nominalwerthe von der Regierung eingelöst werden. Dieselbe Bemerkung gilt ebenfalls für die Luxemburger Staatsanleihe von 1863 und für die $4^1/_2$ % Anleihe der Stadt Luxemb.)

4. Wieviel kosteten 2300 Fr. Luxb. Anleihe von 1859 am 2. Febr. 1865 à $91^5/_6$ ohne den nächsten Zinscoupon? Hier hat der Verkäufer dem Käufer die Zinsen à 4% bis zum ersten Juli zu vergüten.

5. Wieviel kosteten a) mit dem Zinscoupon b) ohne denselben, 3200 Fr. Luxemb. Anleihe von 1863 am 2. Febr. 1865 à $90^1/_2$? (Zinsen à 4%. Zinstermine 1. Mai und 1. Nov.)

6. Wieviel % erträgt ein Capital (außer dem Vortheile, den die Einlösung der Obligationen gewährt), wenn man am 6. Febr. Luxb. Anleihe kauft zu $90^1/_2$?

7. Jemand kaufte am 1. Jan. 1865 eine Obligation von 1000 Fr. Luxb. Anl. v. 1859 à $90^1/_2$. Gesetzt seine Nummer falle bei der Verloosung für 1870 unter diejenigen, welche zu ihrem vollen Nominalwerthe am 1. Jan. 1870 eingelöst werden. Wieviel gewinnt er, wenn er die (einfachen) Zinsen seines Geldes zu 5% berechnet?

8. Am 2. Januar 1865 kauft man in Berlin 2000 Thlr. in Papieren der freiwilligen Staatsanleihe à $101^3/_4$. (Zinsen à $4^1/_2$ % am 1. April und am 1. Oct.) Wieviel muß man dafür geben? — Erklärung. Der Käufer gibt für 100 Thlr. in Papier $101^3/_4$ Thlr. in Geld und vergütet dem Verkäufer, da er den für den 1. April 65 fälligen Zinscoupon empfängt, die Zinsen à $4^1/_2$ % vom 1. Oct. 64 bis zum 2. Jan. 65.

9. Wieviel kosteten am 12. Jan. 1865 800 Fr. röm. Anleihe à 72%, mit den Zinscoupons? (Zinsen à 5% am 1. März und 1. Oct.)

10. Welchen Werth haben am 5. Dec. in Leipzig 500 Thlr. Sächsische Staats-Schuldscheine à 101½. (Zinsen à 4% am 1. April und am 1. Oct.) Anmerk. Man füge zum Werthe der Papiere die Zinsen von 32 Tagen, da man in Leipzig (was sonst nirgends geschieht) die beiden äußersten Tage der Zinsperiode mitrechnet.

11. Wieviel bezahlt man in Wien am 5. Jan. 1865 für 6000 Fl. in österr. 5% Metalliques à 71,70? Zinstermine 1. Mai und 1. Nov. Anm. Derjenige, welcher die Zinsen österr. Staatspapiere erhebt, muß davon 7% für Einkommensteuer abgehen lassen. Bei Berechnung der Zinsen vom 1. Nov. bis zum 5. Januar werden also 7% abgezogen. — Wieviel % Zinsen ertragen demnach eigentlich die österr. Metalliques?

12. Wieviel bezahlt man in Frankfurt a. M. für 5000 Thlr. in 3½ % preuß. Staatsschuldscheinen à 89, wenn der Verkäufer dem Käufer den am 1. Jan. verfallenden Zinscoupon überläßt? Man rechne 1 Thlr. = 105 Kreuzer.

13. Am 18. Sept. 1862 kaufte Jemand in Amsterdam 3500 Fl. in holl. Integralen mit den Zinsen vom 1. Juli. Seine Ausgaben beliefen sich mit ¼ % Provision und ⅛ % Courtage auf 2273 Fl. 8 Cents. Wie hoch stand der Curs dieser Papiere?

Anm. Die Courtage wird in Amsterd. vom Nennwerth, die Provision vom Kaufpreise der Papiere berechnet.

14. Paris (d. h. die Börse von Paris) notirt am 6. Febr. 1865 **Rente 3 %, jouissance janv. Comptant.** 67,05 **Terme** 67,25.

Welches Capital muß man anlegen, um sich am 6. Febr. 1865 4500 Fr. jährliche 3 % Rente zu kaufen, 1° wenn man gleich, 2° wenn man erst am Ende des Monates in den Besitz dieser Papiere gesetzt werden will?

Erklärung. **Jouissance** 1. Jan. = die jährliche Rente läuft vom 1. Jan. **Comptant** 67,05 = die Papiere werden gleich ausgeliefert zu 67Fr.,05 **per** 3 Franken Rente, die vom 1. Jan. läuft. Die französ. 3, 4, 4½ % Renten, Inscriptionen (d. h. Einschreibungen in das Hauptbuch der Staatsschuld) genannt, lauten nämlich nicht auf ein bestimmtes Capital, und haben also nicht einen Nominalwerth, sondern sie bescheinigen bloß die vom Staate übernommene Verpflichtung, dem Besitzer der Papiere eine gewisse Summe Zinsen oder eine Rente zu gewähren. Die 3 % Rente lau-

tet auf eine Rente von 1500 Fr., so daß man nur 1500 Fr. oder ein Vielfaches von 1500 Fr. Rente kaufen kann. Diese Rente wird den 1. Jan., den 1. April, den 1. Juli und den 1. October in vierteljährigen Raten ausbezahlt. Der bereits verfallene Theil der Rente ist im Curse mit einbegriffen, so daß diese Renten im Werthe zunehmen bis zu dem Tage, an welchem der letzte Zinscoupon nicht mehr mit verhandelt wird, (**coupon détaché**), was am 16. des dem Zinstermine vorhergehenden Monates geschieht. — **Terme** = Preis zu dem man verspricht an einem bestimmten Tage (gewöhnlich am letzten des Monats — **fin courant** — oder des folgenden Monates — **fin prochain**) die Rente zu liefern.

Zu dem gefundenen Betrage ist $\frac{1}{8}$ % vom Capital für **Courtage**, da die Geschäfte in Renten nur durch einen Mäkler gemacht werden können, und 35 Ct. für **Stempel** hinzuzufügen.

15. Wieviel mußte man (Courtage und Stempel eingerechnet) am 25. Nov. 1864 bezahlen für 4500 Fr. in 3 % à 64,95 und in $4\frac{1}{2}$ % Rente à 92,30? **Anmerkung.** Die Zinstermine für die $4\frac{1}{2}$ % Rente sind der 22. März und der 22. September; doch wird schon am 7. März und am 7. Sept. ohne Coupon gehandelt.

16. Zu welchem Curse kaufte man am 26. Jan. 1865 a) für 48060Fr.,35, Courtage und Stempel mit einbegriffen, 2250 Fr. $4\frac{1}{2}$ % Rente, und b) für 33542Fr.,23 Capital 1500 Fr. 3 % Rente?

17. Zu wieviel Zinsen legt Jemand sein Geld an, der am 1. Jan. 1865 3 % Rente kauft à 66,80 und $4\frac{1}{2}$ % Rente à 93,90? (Man berücksichtige bloß die Courtage.)

18. Am 3. December 1864 kaufte Jemand à **terme** 9000 Fr. 3 % Rente à 65,70 am letzten December stand der Curs auf 66,35; wieviel hat er gewonnen?

19. Am 11. Januar 1865 kaufte Jemand à **terme** 6750 Fr. $4\frac{1}{2}$ % Rente à 66,90 und am letzten Januar stand der Curs auf 67,20. wieviel hat er verloren?

20. Bei den französ. Renten heißt es, sie stehen **al pari**, wenn ihr Preis 5 % Zinsen trägt. Zu welchem Curse stehen also die 3 % Rente, die 4 % Rente, die $4\frac{1}{2}$ % Rente am Tage der Zinstermine **al pari**?

21. Zu welchem Curse stehen die 3 % Rente am 1. Februar und die $4\frac{1}{2}$ % Rente am 22. April al pari? (Siehe Aufg. 14 und 15.)

22. Welches ist das entsprechende Fallen (baisse) der $4\frac{1}{2}$ % Rente, wenn die 3 % Rente 75 Ct. fällt?

23. Welches ist das entsprechende Steigen (hausse) der 3 % Rente, wenn die $4\frac{1}{2}$ % Rente um 1 Fr. 20 Ct. steigt?

24. Wie hoch müssen die 4 % Rente und die $4\frac{1}{2}$ % Rente stehen, wenn ihr Curs (abgesehen vom Zinstermintage) dem Curse der 3 % Rente à 64 Fr.,85 entsprechen soll?

25. Die Wilhelm-Luxemburg-Eisenbahnactionen (Dividende, keine Zinsen) wurden am 12. Jan. 1865 vermerkt zu 131 Fr. per Stück von 500 Franken. Wie müßte man sie notiren, wenn man ihren Curs in Procenten ihres Stammwerthes ausdrücken wollte?

26. Am 12. Jan. 1865 kaufte man Obligationen der Wilhelm-Luxemb.-Eisenbahn, welche 52 Fr.,50 halbjährige Zinsen ertragen, für 2065 Fr. Wie hoch stand ihr Curs? Derselbe wird per Stück von 500 Fr. notirt. (Zinsen 3 %, keine Dividende.)

27. Wie hoch standen am 12. Jan. 1865 die Actien der Luxb. Internat. Bank, wenn man 400 Thlr. solcher Actien für 326 Thlr. 20 Sgr. kaufen konnte? Ihr Curs wird in % des Nominalwerthes vermerkt?

28. Wieviel bezahlt man für 12 Stück Interimsactien von 500 Fr. mit 30% Einzahlung seit 2 Monaten, wenn die Actien à 103% stehen? Man ziehe dem Verkäufer den Betrag der noch einzuzahlenden Summe von dem Preise der Actien ab, und vergüte ihm 5% Zinsen für die gemachte Einzahlung.

Kettenregel.

206. Es gibt Aufgaben, deren Angaben in einer andern Weise, als bei derjenigen von Nr. 162 sich darstellen, und die sich doch durch mehrere Regel-de-tri lösen lassen, und folglich zusammengesetzte Regel-de-tri-Aufgaben sind. Eine solche ist z. B.

Aufgabe 1. In 2 Tagen verdient Jemand in Rom 3 Scudi; wieviel Franken verdient er in 25 Tagen? 100 Scudi machen 536 Franken.

Auflösung. Verdient Jemand in 2 Tagen 3 Scudi, so verdient er in 1 Tag $^3/_2$ Sc., und in 25 Tagen $^{75}/_2$ Scudi. — Sind 100 Scudi = 536 Fr., so ist 1 Scudo = $^{536}/_{100}$ Fr. und $^{75}/_2$ Sc. = $^{536}/_{100}$ Fr. × $^{75}/_2$ = 201 Fr.

Oder: Wenn 100 Scudi = 536 Fr., so ist 1 Scudo = $\frac{536}{100}$ und 3 Scudi oder das Verdienst von 2 Tagen = $\frac{536 \times 3}{100}$ Fr.; das Verdienst von 1 Tag macht demnach $\frac{536 \times 3}{100 \times 2}$ Fr. und das Verdienst von 25 Tagen $\frac{536 \times 3 \times 25}{100 \times 2}$ Fr. = 201 Fr.

Anmerkung. Aufg. 162 enthält mit dem Resultate zwölf Zahlen; je zwei und zwei dieser Zahlen bezeichnen Größen derselben Art, (9 Stunden, 10 Stunden — 12 Tage, 18 Tage — 20 Arbeiter, 15 Arbeiter ꝛc.) Die sechs ersten dieser Zahlen bilden den ersten Ansatz a, bezeichnen ein Verhältniß und bedingen sich gegenseitig, d. h. sie gehören zusammen und der ganze Ansatz wird falsch, wenn man eine dieser Zahlen ändert. Die sechs andern bilden die Auflösung l und bezeichnen ein jenem Verhältnisse entsprechendes Verhältniß. In ähnlicher Weise enthält obige Aufg. 6 Zahlen, und je zwei dieser Zahlen bezeichnen Größen derselben Art (2 Tage, 25 Tage — 3 Scudi, 100 Scudi — 536 Franken 201 Franken), aber hier bilden nicht die Tage, Scudi und Franken ein einziges zusammengehöriges Verhältniß, sondern mehrere unabhängige Verhältnisse, denn 100 Scudi bilden 536 Franken, mag der Arbeiter in 2 Tagen 3 Sc. oder in 6 Tagen 100 Scudi verdienen. Allerdings ist der Unterschied kein wesentlicher, und es ließe sich obige Aufgabe mit einiger Gewalt in die Form der Aufg. 162 hineinzwängen. Z. B. Wenn Jemand 2 Tage arbeitet und sich bezahlen läßt in Geldsummen, deren 100 auf fünf hundert sechs und dreißig Fr. gehen, so erhält er 3 solcher Summen. — W. J. 1 T. arb. u. l. s. ausb. in Gs., d. 100 auf f. h. s. u. dr. Fr. g., s. erh. er $^3/_2$ s. S. — W. J. 25 T. arb. u. l. s. ausb. in Gs., d. 100. auf f. h. s. u. dr. Fr. g., s. erh. er $^{75}/_2$ s. S. — W. J. 25 T. arb. u. l. s. ausb. in Gs. d. 1 auf f. h. s. u. dr. Fr. geht, s. erh. er $^{75}/_{200}$ s. S. — W. J. 25 T. arb.

u. s. f. ausd. in Gs., d. 536 auf fünf hundert sechs und dreißig Fr. gehen, so erh. er $^{75}/_{200} \times 536 = 201$ solcher Summen oder 201 Franken.

207. Eine zusammengesetzte Regel-de-tri dieser Art, deren Angaben lauter einfache Verhältnisse bezeichnen und sich durch Gleichungen [1]) ausdrücken lassen, kann durch die Kettenregel abgekürzt werden.

Aufgabe 2. 59 Yards [2]) eines Zeuges kosten mit allen Spesen 14 Pfund Sterling; wieviel Franken kosten 7 Luxemburger Ellen? 5 Lux. Ellen = 3 Meter; 23 sächsische Ellen = 13 Meter; 21 sächs. Ellen = 13 Yards; 118 rhein. Gulden = 10 Pf. Sterl.; 7 rhein. Gulden = 15 Fr.

Auflösung. Wir wollen mit x die Zahl von Franken bezeichnen, welche 7 Luxb. Ellen kosten und dann die verschiedenen Gleichungen so untereinander schreiben, daß das erste Glied einer jeden folgenden Größen von derselben Art bezeichnet, als das zweite Glied der vorhergehenden. [3])

x Fr. = 7 Luxb. Ellen. [4])
5 Luxb. Ellen = 3 Meter.
13 Met. = 23 sächs. Ellen.
21 sächs. Ellen = 13 Yards.
59 Yards = 14 Pf. Sterl.
10 Pf. Sterl. = 118 rhein. Gulden.
7 rhein. G. = 15 Fr.

[1]) Eine Gleichung besteht aus zwei Gliedern, welche bei verschiedenem Ausdrucke einander gleich sind und deswegen durch das Zeichen = verbunden werden. Z. B. $5 \times 2 = 10$. oder 6 Thlr. — 10 Fr. = 7 rhein. Guld. — 1 östr. Fl.

[2]) Yard, englisches Längenmaß, macht genau 0,91438348 Meter.

[3]) Von der Gestalt dieses Ansatzes, einer Art Verkettung, hat diese Regel ihren Namen.

[4]) Unter Luxb. Ellen, sächs. Ellen, Yard verstehe man hier nicht die Länge, sondern den Preis einer Luxb. Elle, eines Meters u. s. w.

Bezeichnet nun das zweite Glied der letzten Gleichung Größen von derselben Art, wie das erste Glied der ersten, so finden sich in den sechs ersten Gliedern dieselben Größen, wie in den sechs zweiten.

Kännten wir den Werth des Frankens, der Luxemburger Elle, des Meters, u. s. w., in Centimes (oder in Einheiten irgend welcher Art), so müßten sich durch die Multiplication des Werthes dieser Größen mit der davorstehenden Zahl für die beiden Glieder jeder Gleichung gleiche Producte ergeben, d. h. wenn wir mit Franken, Luxemb. Ellen, Meter, u. s. w., nicht Maßeinheiten, sondern die Zahlen von Centimes (oder Silbergroschen, 2c.) bezeichnen, welche die Werthe dieser Maßeinheiten sind, so ist

x × Fr. = 7 × Luxemb. Elle.
5 × Luxemb. Elle = 3 × Meter.
13 × Meter = 23 × sächs. Elle.
21 × sächs. Elle = 13 × Yard.
59 × Yard = 14 × Pf. Sterl.
10 × Pf. Sterl. = 118 × rhein. Guld.
7 × rhein. Guld. = 15 × Fr. Da alle die sieben Zahlen der ersten Glieder den sieben Zahlen der zweiten Glieder gleich sind, so muß auch das Product der sieben ersten Zahlen dem der sieben letzten gleich sein, oder

x × Fr. × 5 × Luxemb. Elle × 13 × Meter × 21 × sächs. Elle × 59 × Yard × 10 × Pf. Sterl. × 7 × rhein. Guld. = 7 × L. Elle × 3 × Meter × 23 × sächs. Elle × 13 × Yard × 14 × Pf. Sterl. × 118 × rhein. Guld. × 15 × Fr. Dividirt man diese gleichen Producte durch dieselben Zahlen, so müssen sich die Resultate ebenfalls gleich bleiben. Folglich ist

$$x \times 5 \times 13 \times 21 \times 59 \times 10 \times 7 =$$
$$7 \times 3 \times 23 \times 13 \times 14 \times 118 \times 15.$$

Dividirt man ferner durch $5 \times 13 \times 7$, so erhält man $x \times 21 \times 59 \times 10 = 3 \times 23 \times 14 \times 118 \times 3$ und indem man durch $3 \times 7 \times 59$ dividirt $x \times 10 = 23 \times 2 \times 2 \times 3 = 276$, und indem man durch 10 dividirt, $x = {}^{276}/_{10} = 27{,}6$. Die Zahl von Franken, welche also dem Werthe von 7 Luxemb. Ellen entspricht, ist 27,6.

Hieraus ergibt sich folgende **Regel**. Hat man mehrere Gleichungen von obiger Art, und befinden sich auf der einen Seite die Namen derselben Größen, wie auf der andern (was immer der Fall ist, wenn das erste Glied jeder folgenden Gleichung denselben Namen, wie das zweite der vorigen und das erste Glied der ersten denselben Namen, wie das zweite der letzten hat), so kann man ganz von dem Namen dieser Größen absehen, auf beiden Seiten dieselben Factoren streichen und man findet dann die zu suchende Zahl x, indem man die bekannten Zahlen auf der Seite von x mit einander multiplizirt und das Product der Factoren der andern Seite durch diese Zahl dividirt.

208. Gewöhnlich fängt man die erste Gleichung mit x an, doch ist dieses nicht nothwendig. Auch läßt sich obiges Verfahren eben so gut auf Brüche, als auf ganze Zahlen anwenden. In diesem Falle multiplizirt man manchmal die einander gleichen beiden Seiten mit derselben Zahl, um die Nenner zu vertreiben. Beispiel:

Aufgabe 3. Ein Kaufmann bezieht aus London Baumwolle à $16^{1}/_{4}$ Pence per ℔, ohne die Spesen, welche $12^{1}/_{2}$ %, betragen; zu wieviel Franken muß er den Centner verkaufen, wenn er 10 % gewinnen will? 1 Pfund Sterling $= 6^{3}/_{4}$ Thlr. 1 engl. ℔ $= 453^{\text{Gramme}},593$.

Auflösung.

1 ℔ engl. = $16\frac{1}{4}$ Pence.	Indem man beide Seiten multipl.	4 = 65.
12 = 1 Shilling.		12 = 1.
20 = 1 Pf. Sterling.		20 = 1.
1 = $6\frac{3}{4}$ Thlr.		4 = 27.
1 = 3,75 Fr.		100 = 375.
100 = $112\frac{1}{2}$ F. (mit Spesen[1]).		200 = 225.
100 = 110 Fr. mit Gewinn.		100 = 110.
x = 1 Centner.		x = 1.
1 = 100 ℔ deutsch.		1 = 100.
1 = 500 Gramm.		1 = 500.
453,593 = 1 ℔ engl.		453593 = 1000.

Streicht man auf beiden Seiten 7 Nullen und dividirt man beide Seiten durch 2 und 3, so bleibt auf der rechten Seite $65\times9\times375\times225\times55\times5$ und auf der linken $2\times4\times2\times4\times2\times x\times453593$. x ist demnach $\frac{65\times9\times375\times225\times55\times5}{2\times4\times2\times4\times2\times453593}$ = 233Fr.,79.

Aufgaben.

1. Man löse mit Hülfe der Kettenregel Aufg. 12 und 13 von Seite 160 und Aufg. 1, Nr. 206.

2. Wenn 25 Kilogr. $62\frac{1}{2}$ Franken kosten, wieviel Thaler kosten 27 ℔ (Zollvereinsgewicht); wieviel rhein. Gulden kosten 36 ℔ (Zollvereinsgewicht); wieviel öster. Florin kosten 64 Wiener ℔? (1 Wiener ℔ = 560Gr.,012.)

3. Wieviel Pence kostet 1 Stück in England, wenn 32 Groß $130\frac{14}{26}$ Thlr. kosten? (1 Groß = 12 Dutzend; 1 Pf. Sterl. = 25Fr.,50.)

[1]) Ebenso richtig, als man sagt „1 ℔ engl. = $16\frac{1}{4}$ Pence“ sagt man auch „100 Fr. ohne Spesen = $112\frac{1}{2}$ Fr. mit Spesen“. Ersteres will sagen: 1 ℔ engl. wird bezahlt mit $16\frac{1}{4}$ Pence; letzteres bedeutet: 100 Fr., welche netto dem Londoner Verkäufer entrichtet werden, werden vom Ankäufer bezahlt mit $112\frac{1}{2}$ Fr. In ähnlicher Weise will die folgende Gleichung sagen: 100 Fr. vom Ankaufspreise gelten beim Verkaufe 110 Fr.

4. Wieviel Centin. 3 kostet 1 Bogen Schreibpapier, wenn der Ballen 82 Thlr. kostet? (Vergl. Aufg. 15, Seite 58.)

5. Ein Landmann erhält für sein Haferstroh, das er à 28 Fr. per 1000 Kilogr. verkauft, 500 Fr; wieviel Hafer hat er geerndtet, wenn auf 47 Kilogr. Stroh ein Hektoliter Hafer kommt?

6. Ein Hektoliter Waizen wiegt 76 Kilogr., und das Stroh davon wiegt 167 Kilogr.; wieviel Waizen und Stroh liefert demnach ein Acker von 2 Hektares 30 Ares, wenn auf einen Are 178 Kilogr.,85 Dünger kommen, und 22 Kilogr. Dünger durchschnittlich 1 Kilogr. 870 Gr. Waizen geben?

7. Wieviel Thaler kostet 1 preuß. Wispel Waizen, wenn der Hektoliter 15 Fr.,50 kostet? (1 pr. Scheffel = $54^{19}/_{20}$ Liter. Ein Wispel im Getreidehandel = 25 Scheffel.)

8. Wenn in Luxemburg 1 Hektoliter Waizen 20 Fr. kostet, in Trier 1 Scheffel 3 Thlr. und in Cöln 100 Kilogr. 7 Thlr. kosten, wo ist er dann am wohlfeilsten und wo am theuersten? Man nehme an, der Hektoliter wiege $75^1/_2$ Kilogr.

9. 10000 Pariser Klafter (toises) = 19490,Meter,36591. Wieviel Meter macht 1 Pariser Fuß? Wieviel Fuß und Zoll macht 1 Meter? 1 toise = 6 (Pariser) Fuß à 12 Zoll, à 12 Linien [1]).

10. Die für den Handel wichtigsten Längenmaße betragen in Dezimalbrüchen vom Meter

England, Yard . . .	0,91438 M.	Baden, Hessen-Darmstadt, Nassau, Luxemburg u. Schweiz Elle	0,6 M.
Bayern, Elle	0,83301 „		
Wien, Elle.	0,77919 „		
Rußland, Arschin. .	0,71119 „		
Preußen, Elle. . . .	0,66694 „	Hannover, Elle. . . .	0,58119 „
Kgr. Sachsen, Elle.	0,56638 „	Hamburg, Elle. . . .	0,57284 „
		Frankfurt a. M., Elle	0,56638 M.

a) Eine Brabanter Elle in Hamburg = 0,6874 Meter; wieviel Hamb. Ellen machen 24 Brabanter Ellen; b) eine Brabanter Elle in Leipzig = 0,6856 M.; wieviel Brabanter Ellen machen 200 sächs. Ellen; c) eine Brabanter Elle in Frankfurt a. M. = 0,6992 M.; wieviel Brab. Ellen sind 60 Frankfurter Ellen?

[1]) d. h. 1 Fuß = 12 Zoll. 1 Zoll = 12 Linien.

11. Wieviel Kilometer machen 5 englische Meilen? (1 Meile = 1760 Yards.)

12. Eine Wiener Elle = 2Fuß,465. Wieviel Wiener Fuß, Zoll und Linien macht 1 Meter? 1' (1 Fuß) = 12" (Zoll); 1" = 12''' (Linien).

13. Wieviel Luxemburger Ellen machen 60 preuß. Ellen?

14. Wieviel Meter macht 1 preuß. Fuß? 1 pr. Elle = 25½ Zoll; 1' = 12".

15. Eine bad. Elle = 2 Fuß à 10 Zoll à 10 Linien à 10 Punkte. Wieviel badische Fuß, Zoll, Linien und Punkte macht 1 Fuß von ⅓ Meter?

16. Wieviel russische Arschin, bayerische Ellen und hannover. Ellen macht 1 Pariser Fuß?

17. Man rechnet gewöhnlich: 11 preuß. Ellen = 8 Yards. Um wieviel ‰ ist bei dieser Annahme die Zahl 8 zu groß oder zu klein?

18. Man rechnet gewöhnlich: 8 sächs. Ellen = 5 Yards, und 7 Ellen = 4 Meter; um wieviel % ist dabei die Zahl der Ellen zu groß oder zu klein? Um wieviel % wäre die Zahl der Ellen zu groß oder zu klein, wenn man rechnete: 21 sächs. Ellen = 13 Yards und 23 sächs. Ellen = 13 Meter?

19. Wenn man die badische Elle (5 Ellen = 3 Meter) zu 2 rhein. Gulden 6 Kreuzer verkaufte, so würde man 10 % verlieren; zu wieviel Franken wird man den Meter verkaufen müssen, um 15 % zu gewinnen?

20. Wieviel Neukreuzer kostet 1 Wiener ℔, wenn 100 Hamburger ℔ 33¾ Bancomark kosten? (27¾ Bancomark = 1 Mark fein Silber; 1 Mark = 233Gramm,855; 1 ℔ fein Silber = 500 Gramm fein Silber = 45 öster. Florin; 25 Wiener ℔ = 28 Hamburger ℔.)

21. Wieviel öster. Florin ist ein englisches Goldstück von einem Pf. Sterling werth, wenn 32 solcher Goldstücke 234Gramm,190 Gold enthalten und 500 Gramm reines Gold 459⅙ Thlr. werth sind? (7 öster. Florin = 4 Thlr.)

22. Wieviel Franken kosten 50 Kilogramm einer Waare, wenn 1 Pud in Petersburg 17 Rubel 60 Kopeken kostet? (1 Pud = 40 ℔ russisch; 1 ℔ russisch = 409Gr.,516; 1 Rubel = 100 Kopeken; 100 Rubel = 93¾ Thlr.)

23. Wieviel Hamburger Courantmark kosten 120 Hamburger Last Getreide, wenn in Amsterdam 30 Hektoliter mit 262 Fl. 50 Cents bezahlt werden, und 1 Hamb. Last = 60 preuß. Scheffel? (100 preuß. Scheffel = 5496 Liter; 36 holl. Florin = 40 Bancomark; 127 Courantmark = 100 Bancomark.)

24. Ein Kaufmann aus Luxemburg erhält Waaren aus Preußen; er bezahlt für 5 Centner 91 Thlr. 24 Sgr.; die Spesen belaufen sich auf 10 % des Werthes. Zu wieviel Franken muß er 8 Kilogramm verkaufen, wenn er 15 % gewinnen will?

25. Wieviel Liter betragen 100 preuß. Quart à 64 preuß. Kubikzoll, wenn 1 preuß. Fuß = 139,13 pariser Linien und 1 Meter = 443,3 pariser Linien?

Durchschnittsrechnung.

209. Durchschnittszahl oder arithmetisches Mittel mehrerer Zahlen nennt man eine andere Zahl, welche so beschaffen ist, daß wenn man jede der ersten Zahlen durch diese ersetzt, die einen zusammen genau um so viel vermehrt werden, als die andern zusammen dadurch vermindert werden. So ist z. B. 9 die Durchschnittszahl von 6, 7, 9, 10 und 13; denn wenn man statt jeder 9 setzt, so werden die beiden ersten um $3+2=5$ vermehrt, die dritte wird nicht verändert und die beiden letzten werden um $1+4=5$ vermindert. Hat man mehrere gleich sorgfältige Messungen gemacht und abweichende Resultate gefunden, so nimmt man deren Durchschnittszahl an als die richtige Angabe, weil man voraussetzen kann, daß sich die verschiedenen Abweichungen ausgleichen oder vielmehr, da eine Angabe so wahrscheinlich ist, als die andere, so berücksichtigt man sie gleichviel, indem man die eine um so viel vermindert, als man die andere vermehrt, und dieselben also gleichviel verändert, bis sie einander gleich

werden, d. h. bis man die mittlere Zahl gefunden hat. Dieses Resultat ist bei 4 oder 7 Messungen 4 oder 7 mal so wahrscheinlich, als das Ergebniß jeder einzelnen Messung. Bei verschiedenen Preisangaben, Bevölkerungszahlen, andern statistischen Angaben u. s. w., die sich auf verschiedene Zeiten oder Orte beziehen, will man oft nur eine Zahl kennen, die so beschaffen ist, daß wenn man sie statt der einzelnen annimmt, die Abweichungen sich ausgleichen. Dieses ist die Durchschnittszahl.

210. **Aufgabe 1.** Welches ist die Durchschnittszahl von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ und 1?

Auflösung. Ersetzt man eine jede dieser Zahlen durch die Durchschnittszahl, so werden die einen um so viel vermehrt, als die andern vermindert werden, die Summe der fünf Zahlen bleibt also dieselbe; das Fünffache der Durchschnittszahl macht folglich $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+1=3\frac{1}{4}$; mithin ist diese $3\frac{1}{4} : 5=\frac{13}{20}$.

211. **Aufgabe 2.** Jemand verzehrt am Sonntag 3Fr.,50, erspart am Montag 1Fr.,25, er gibt am Dienstag 0Fr.,50 mehr aus als er verdient, er spart am Mittwoch 2 Fr., am Donnerstag 1Fr.,25, am Freitage 90 Centimes, und verzehrt am Samstag so viel als er verdient. Wieviel sparte er im Durchschnitte jeden Tag der Woche?

Auflösung. Während der 7 Tage betrugen seine Mehreinnahmen 1Fr.,25+0 Fr.+2 Fr. + 1Fr.,25 + 0Fr.,90 = 5Fr.,40, und seine Mehrausgaben beliefen sich auf 3Fr.,50+0Fr.,50=4 Fr. Seine Ersparnisse von 7 Tagen betragen demnach 1Fr.,40 und die durchschnittliche Ersparniß von einem Tag beträgt 20 Centimes.

212. **Aufgabe 3.** Ein Examinator soll 50 Punkte auf eine Prüfung in der Arithmetik setzen. Wäre bloß die

Auflösung einer Aufgabe zu berücksichtigen, so bekäme A 44, B 35 und C 30 Punkte; wäre aber bloß eine theoretische Frage zu berücksichtigen, so bekäme A 37, B 42 und C 30 Punkte. Wieviel Punkte muß er jedem geben, wenn er der theoretischen Frage $2\frac{1}{2}$ mal so viel Einfluß auf das Resultat des Examens beilegen will, als der Auflösung des Problems?

Auflös. Ist die zweite Prüfung $2\frac{1}{2}$ mal so entscheidend, als die erste, so wird der Examinator annehmen, A habe $2\frac{1}{2}$ Prüfung [1]) gemacht, jede von 37 Punkten und 1 Prüfung von 44 Punkten; also $3\frac{1}{2}$ Prüfung, zusammen von $37\times2\frac{1}{2}+44=\frac{37\times5}{2}+\frac{88}{2}=\frac{273}{2}$ P. Im Durchschnitte verdient er also von einer Prüfung $\frac{273}{2} : 3\frac{1}{2}=\frac{273\times2}{2\times7}=39$ P.

B erhält von $3\frac{1}{2}$ Prüf. $42\times2\frac{1}{2}+35=\frac{42\times5}{2}+35$; von einer Prüfung im Durchschnitt $\frac{42\times5}{2} : \frac{7}{2}+35 : \frac{7}{2}=30+10=40$ P.

C erhält von $3\frac{1}{2}$ Prüf. $30\times2\frac{1}{2}+30=30\times3\frac{1}{2}$; von einer Prüfung im Durchschnitt also 30 Punkte.

213. Aufgabe 4. Jemand hat 3^Hektares^, 40 Ackerland, wovon der Hektare im Durchschnitte 40 Franken erträgt, und 7^Hekt.^, 20, wovon der Hektare im Durchschnitte 37^Fr.^,50 erträgt; wieviel beträgt der mittlere Ertrag von 1 Hektare?

Auflösung. 3^Hekt.^ 40, wovon der Hekt. durchschnittlich 40 Fr. erträgt, geben einen Ertrag von $40\times3{,}40=136$ Fr.;

[1]) Derartige Ausdrücke, die keinen rechten Sinn zu haben scheinen, kommen öfter vor und lassen sich leicht erklären. $2\frac{1}{2}$ Prüfung von 37 Punkten will sagen 1 Prüfung von 37 P. + 1 Prüfung von 37 P. und eine dritte Prüfung, die eben so gut ist, von der aber nur die Hälfte berücksichtigt wird.

7 Hekt., 20 wovon der Hekt. durchschnittl. 37 Fr.,50 erträgt, geben einen Ertrag von 37 Fr.,50×7,20=270 Fr.; 3 Hekt.,40 +7 Hekt.,20 =10 Hekt,60 ertragen also 136+270=406 Fr.; durchschnittlich erträgt also ein Hektare 406 Fr. : 10,60= 38 Fr. 30 $^{10}/_{53}$ C.

214. Aufgabe 5. Welches ist die Durchschnittszahl von 2462,75; 2466,25; 2459 und 2464.

Auflösung 1. Dieselbe beträgt

$$\frac{2462{,}75+2466{,}25+2459+2464}{4}=\frac{9852}{4}=2463.$$ Vergl. 155.

Auflösung 2. Wenn man jede der vier obigen Zahlen durch 2460 ersetzte, so würde die erste um 2,75 die zweite um 6,25, die letzte um 4 vermindert, und die dritte um 1 vermehrt; alle zusammen würden also um 2,75+6,25+4—1=12 vermindert. Ersetzt man also jede Zahl durch 2460+$^{12}/_{4}$=2463, so bleibt die Summe dieselbe, und mithin ist dieses die gesuchte Durchschnittszahl.

215. Mittlere Verfallzeit. Aufgabe 6. Jemand schuldet demselben Gläubiger vier Summen von 1000 Franken, welche er alle zu demselben Zinsfuße geliehen hat. Die Zinsen erfallen jedes Jahr den 21. Januar, den 2. März, den 3. Juli und den 27. September. Er will lieber die Zinsen zusammen bezahlen; an welchem Tage muß dieß geschehen, damit weder der Schuldner noch der Gläubiger benachtheiligt werde.

Auflösung.

Die Zinsen der ersten Summen verfallen 21 Tage,
die der zweiten.... 61 —,
die der dritten.... 184 —,
die der vierten.... 270 —
nach dem Anfange des Jahres. Die mittlere Verfallzeit, d. h.

diejenige Zeit, zu welcher die einen Zinsen zum Nachtheile des Gläubigers so viele Tage später als die andern zu seinem Vortheile früher bezahlt werden, fällt demnach (209) $\frac{21+61+184+270}{4} = 134$ Tage nach dem Anfange des Jahres, oder den 14. Mai.

216. Aufgabe 7. A ist dem B schuldig zu bezahlen 3 Pf. Sterl. nach 1 Monat, 2 Pf. Sterl. nach 5 Mon. und 4 Pf. Sterl. nach 8 M. Wann kann er ohne Vortheil und ohne Schaden die ganze Schuld erlegen?

Auflösung. Da ungleiche Zahlen bei der Berechnung der mittleren Verfallzeit nicht gleich stark berücksichtigt werden dürfen (212), so wollen wir die erste Schuld betrachten, als bestehend aus 3 Schulden von 1 Pf. Sterl., die zweite als aus 2 und die letzte als aus 4 Schulden von 1 Pf. Sterl.

Das 1. Pf.	Sterl.	verfällt	nach	1 M.
Das 2. Pf.	—	—	—	1 M.
Das 3. Pf.	—	—	—	1 M.
Das 4. Pf.	—	—	—	5 M.
Das 5. Pf.	—	—	—	5 M.
Das 6. Pf.	—	—	—	8 M.
Das 7. Pf.	—	—	—	8 M.
Das 8. Pf.	—	—	—	8 M.
Das 9. Pf.	—	—	—	8 M.

Die mittlere Verfallzeit eines jeden Pf. Sterl. ist also der neunte Theil von $1 \times 3 + 5 \times 2 + 8 \times 4 = 45$ Monaten, oder 5 Monate.

217. Aufgabe 8. A hat folgende Wechsel an B zu bezahlen:

500 Thlr.,	welche nach	2	Monaten	verfallen;
250 Thlr.,	—	4	—	8 Tagen verfallen;
150 Thlr.,	—	6	—	12 Tagen verfallen;
400 Thlr.,	—	8	—	22 Tagen verfallen.

Er will ihm einen Wechsel ausstellen für die ganze Schuld; welche Verfallzeit ist in dem Wechsel anzuführen?

Auflösung. 500 Thlr. verfallen jeder nach 2 M.

250 Thlr.	—	—	4 M. 8 T.
150 Thlr.	—	—	6 M. 12 T.
100 Thlr.	—	—	8 M. 22 T.

Ein Thlr. durch den andern verfällt also nach (2×500 M. $+4\times250$ M. $+8\times250$ T. $+6\times150$ M. $+12\times150$ T. $+8\times100$ M. $+22\times100$ T.): 1000 oder nach 3 Monaten 27 Tagen.

218. **Aufgabe 9.** Jemand schuldet demselben Gläubiger 1000 Franken, wovon die Zinsen zu 5% den 21. Januar verfallen; 800 Fr., wovon die Zinsen zu 6% den 2. März, 900 Fr., wovon die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$% den 3. Juli; und 250 Fr., wovon die Zinsen zu 4% den 27. September verfallen. Welche ist die mittlere Verfallzeit der gesammten Zinsen?

Auflösung. Wir wollen die mittlere Verfallzeit von $\frac{1}{2}$ Franken Zinsen berechnen.

100 halbe Franken verfallen, jeder 21 Tage

96	—	—	—	,	— 61	—
81	—	—	—	,	— 184	—
20	—	—	—	,	— 270	— nach dem

Anfange des Jahres. Ein halber Franken durch den andern verfällt also $\frac{21\times100 \quad +61\times96 \quad +184\times81 \quad +270\times20}{100+96+81+20} = \frac{28260}{297}$ = ungefähr 95 Tage nach Anfang des Jahres oder den 5. April. An diesem Tage hat er $^{297}/_{2}$ Franken Zinsen von $1000+800+900+250=2950$ Franken zu bezahlen. Der mittlere Zinsfuß ist demnach $\frac{297\times100}{2\times2950}=5^{2}/_{59}$ %.

Aufgaben.

1. Das specif. Gewicht des Eises zu 0° beträgt nach Osann 0,926; nach Heinrich 0,905; nach Brunner 0,918; wie hoch mag dasselbe angenommen werden?

2. Wieviel Uhr mag es gewesen sein, als eine Pendeluhr 5 Minuten vor 11 zeigte, eine Taschenuhr $8\frac{1}{2}$ Minute nach, und eine andere $3\frac{1}{2}$ Minute nach 11 zeigte?

3. **A**, **B**, **C**, **D** messen die Höhe eines Thurmes nach dem Schatten. **A** findet $180\frac{1}{2}$ Fuß, **B** 185 Fuß, **C** $179\frac{1}{2}$ Fuß, **D** 177 Fuß. Wie hoch mag er sein?

4. Welches ist a) im Durchschnitte die Größe einer preußischen Provinz b) im Durchschnitte die Bevölkerung einer preußischen Provinz c) im Durchschnitt die Bevölkerung einer □ Meile des preußischen Staates? (S. Seite 46 und 47.)

5. Wie hoch belaufen sich durchschnittlich die monatlichen Einnahmen, die monatl. Ausgaben für Nahrung, die monatl. Ausg. für Kleidung, die andern monatlichen Ausgaben, der Ueberschuß der monatl. Einnahmen nach der Rechnung der Aufg. 19, S. 73.

6. An einem Markttage wurden 275 Hektoliter Waizen zu dem mittleren Preise von 20 Fr. 50 und 125 Hektoliter zu dem mittleren Preise von 19 Fr. 75 verkauft; welches war der durchschnittliche Preis eines Hektoliters?

7. Das arithmetische Mittel von $7\frac{1}{2}$, $8\frac{3}{4}$, $7\frac{3}{4}$ und einer andern Zahl beträgt $7\frac{1}{4}$; welches ist diese andere Zahl?

8. Wieviel Uhr mag es nach den Angaben von Aufg. 2 gewesen sein, wenn die Pendeluhr 3 mal so zuverlässig ist, als eine der andern?

9. Wie hoch mag nach den Messungen von Aufg. 3 der Thurm sein, wenn die Messung von **A** $3\frac{1}{2}$ mal so viel Berücksichtigung verdient, als eine der anderen?

10. Welches ist das arithmetische Mittel von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, von 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, von 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34?

11. Man beweise, a) daß das arithmetische Mittel einer Reihe von Zahlen, von denen jede die vorhergehende um dieselbe Zahl übersteigt, die Hälfte der Summe der beiden äußersten Zahlen ist, und b) daß man die Summe einer solchen Reihe findet, wenn man

die Summe der beiden äußersten Zahlen durch die Anzahl der Zahlen multiplizirt und dieses Product halbirt.

12. Wieviel beträgt demnach die Summe der 20 ersten ganzen Zahlen?

13. Wieviel macht die Summe a) der 5 b) der 8 c) der 10 d) der 20 ersten ungeraden Zahlen?

14. $7 \times 7 =$ das Quadrat von 7; und im Allgemeinen heißt das Product, das man findet, wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplizirt, das Quadrat dieser Zahl. Man beweise, daß die Summe der 7, 8, 9 u. s. w. ersten ungeraden Zahlen des Quadrat macht von 7, 8, 9 u. s. w.

15. Jemand kommt mit den Arbeitern, die ihm einen Brunnen graben sollen, überein, daß er ihnen für den ersten Fuß Tiefe 24 Kreuzer bezahlt und für jeden folgenden 12 Kreuzer mehr, als für den vorhergehenden. Wenn nun der Brunnen 28 Fuß Tiefe erhält, wieviel muß er für den letzten Fuß, und wieviel für den ganzen Brunnen bezahlen?

16. Die Summe einer Reihe von 30 Zahlen, wie sie in Aufgabe 11 beschrieben wurde, beträgt 600; die erste Zahl ist 5; welches ist die letzte? welches ist der Unterschied zwischen jeder Zahl und der folgenden?

17. In luftleerem Raume durchläuft ein fallender Körper in der ersten Secunde ungefähr 4M.,9; in jeder folgenden Secunde aber 9M.,8 mehr, als in der vorhergehenden; wie tief fällt er in der zehnten Secunde? wie tief in allen 10 Secunden?

18. Jemand schuldet demselben Gläubiger fünf Summen von 60 Thlr., welche den 3. März, den 7. Mai, den 8. Juli, den 4. August und den 18. Nov. verfallen. An welchem Tage kann er die ganze Schuld bezahlen? (1 Mon. = 30 Tage.)

19. A schuldet dem B 600 Fr., die nach 1 Monat, 400 Fr., die nach 2 Monaten, und 200 Fr., die nach 3 Monaten verfallen; wann kann er die Gesammtschuld abtragen?

20. Ein Geschäftsmann hat bei einem Rentner 1700 Fr. geliehen am 4. März, 500 Fr. am 2. Oct. und 1000 Fr. am 23. Dec. Er will ihm dafür einen Wechsel ausstellen; von welchem Tage müssen die Zinsen dieses Wechsels laufen? (Monate nach Kalender.)

21. Ein Bankier erhält von seinem Committenten den Auftrag, folgende Wechsel einzuziehen (Schulden einzutreiben): 25 Thlr. per 5. März; 41 Thlr. 20 Sgr. per 20. März; 59 Thlr. 12 Sgr. per 9. April; 35 Thlr. 9 Sgr. per 15. Juni. Er will seinem Committenten den Gesammtbetrag dieser Wechsel unter einem Tage gutschreiben; welches wird dieser Tag sein? (15 Sgr. oder weniger vernachlässige man und eine Summe von mehr als 15 Sgr. berechne man für einen ganzen Thlr. beim Aufsuchen des mittleren Verfalltages, nicht aber bei der Berechnung des Gesammtbetrages der Wechsel.)

22. Es sind zu bezahlen 500 Fl. in 4 Monaten, 400 Fl. in 5 Mon., und 200 Fl. in 12 Monaten, und bis dahin mit 6, $4\frac{1}{2}$ und 3 % zu verzinsen. Wann und zu welchem mittleren Zinsfuße können dieselben auf einmal abgetragen werden?

23. Man berechne die mittlere Verfallzeit der Summen von Aufg. 1, Seite 198 und berechne nach derselben den Discont?

24. Man berechne in ähnlicher Weise Aufg. 2 und 3, S. 198.

25. An welchem Tage verfallen die verschiedenen Posten der Sollseite und die der Habenseite der Rechnung von Aufg. 6. S. 199; welches ist demnach der Rechnungsabschluß?

26. A kauft ein Haus von B für 25000 Fr. unter der Bedingung, nach 1 und 2 Jahren, je 10000 Fr. und nach 3 Jahren 5000 Fr. zu bezahlen. Er bezahlt aber die ersten 10000 Fr. erst nach 21 Monaten und will die andern 15000 zusammen bezahlen; wann sind sie fällig?

27. Für welchen Tag kann nach den Angaben von Aufg. 7. S. 210 der Gläubiger dem Schuldner beide bezahlte Summen verrechnen? Man stelle darnach die Rechnung auf.

28. Zu welcher Zeit hätte der Schuldner (Aufg. 7. S. 210) die noch fehlenden 240 Fr. entrichten müssen, damit die mittlere Verfallzeit der von ihm bezahlten Summe mit dem Verfalltage seiner Schuld zusammengefallen wäre. Da er diese am 1. Jan. 1866 statt an jenem Tage bezahlt, wieviel ist er am 1. Jan. 66 schuldig?

29. Man berechne die mittlere Verfallzeit von Aufg. 8, Nr. 217, durch Beantwortung folgender Fragen: a) Welches ist der jetzige Werth aller Schulden zusammen? (Man rechne bloß die Discont-

zahlen aus.) b) Welche Zeit muß der Schuldner zur Erlegung der Gesammtschuld wählen, damit ihr jetziger Werth derselbe sei?

30. a) Welches war der Werth all' dieser Schulden vor 2 oder 6 Monaten b) Welchen Tag muß der Schuldner zur Erlegung der Gesammtschuld wählen, damit ihr Werth vor 2 oder 6 Mon. derselbe sei?

31. a) Welches ist der Werth mit den Zinsen (man berechne bloß die Zinszahlen) nach 8 oder 12 Monaten? b) Welchen Tag muß der Schuldner zur Erlegung der Gesammtschuld wählen, damit ihr Werth mit den Zinsen nach 8 oder 12 Monaten derselbe sei?

32. Wenn man Geld leiht für $\frac{1}{3}$ Jahr, das Capital nach 4 Monaten zurückbringt und wieder für $\frac{1}{3}$ Jahr leiht, und diese Anleihe auch für das letzte Drittel des Jahres wiederholt und die Zinsen des ersten Drittels 8 Monate, die des zweiten 4 Monate und die des dritten gleich nach dem Ende des Drittel-Jahres bezahlt, so hat man offenbar seine Verpflichtung erfüllt. Durchschnittlich wieviel Monate nach verflossenem Drittel-Jahre hat man die dritteljährigen Zinsen bezahlt, oder wann verfallen (allerdings nach einer nur annäherungsweise richtigen Berechnung) die Zinsen für ein nach 4 Monaten zurückgezahltes Capital? (Vgl. 196.)

33. In ähnlicher Weise berechne man die Verfallzeit der Zinsen für ein nach 6, nach 3, nach 2, nach 1 Monat zurückgezahltes Capital?

Repartitions- oder Vertheilungs- und Gesellschafts-Rechnung.

219. Durch die **Repartitionsrechnung** wird ein Ganzes in Theile getheilt, so daß der erste Theil eine gewisse Anzahl noch unbestimmter Größen, der zweite Theil eine andere Zahl derselben Größen, der dritte Theil eine dritte Zahl derselben Größen, u. s. w. enthalte, z. B.

220. Aufgabe 1. 216 in vier Theile zu theilen, so daß der erste Theil $2\frac{1}{2}$ mal eine zu bestimmende Größe, der zweite diese Größe 3 mal, der dritte diese Größe 7 mal und der vierte diese Größe 10 mal enthalte.

Auflösung. Diese Größe ist $2\frac{1}{2}+3+7+10=22\frac{1}{2}$ mal in 216 enthalten und ist demnach $216 : 22\frac{1}{2}=\frac{48}{5}$. Also ist der erste Theil $\frac{48}{5}\times\frac{5}{2}=24$; der zweite $\frac{48}{5}\times3$ $28\frac{4}{5}$; der dritte $\frac{48}{5}\times7=67\frac{1}{5}$; der vierte $\frac{48}{5}\times10=96$.

Anmerkung. Man pflegt zur Probe die 4 Theile, welche zusammen das Ganze bilden müssen, zu addiren : $24+28\frac{4}{5}+67\frac{1}{5}+96=216$.

221. Auf eine gewöhnliche Repartitionsrechnung läßt sich leicht zurückführen **Aufgabe 2.** 123 soll in vier Theile getheilt werden, so daß die Hälfte des ersten Theiles, $\frac{2}{3}$ des zweiten, das Dreifache des dritten und $3\frac{3}{4}$ mal der vierte Theil einander gleich seien.

Auflösung. Betrachten wir als vorläufig zu bestimmende Größe diese einander gleichen Brüche oder Vielfache der einzelnen Theile, so enthält der erste Theil diese Größe 2 mal, der zweite $\frac{3}{2}$ mal, der dritte $\frac{1}{3}$ mal, der vierte $\frac{4}{15}$ mal; das Ganze also $2+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4}{15}=4\frac{3}{30}=4\frac{1}{10}$ mal. Diese Größe beträgt also $123 : 4\frac{1}{10}=30$, und der erste Theil ist $30\times2=60$; der zweite $30\times\frac{3}{2}=45$; der dritte $30\times\frac{1}{3}=10$; der vierte $30\times\frac{4}{15}=8$.

222. Aufgabe 3. 800 in drei Theile zu zerlegen, so daß der erste Theil so viel mal 24 Einheiten enthalte, als der zweite Theil 12 und der dritte Theil 60 Einheiten enthält.

Auflösung. Von $24+12+60$ Einheiten kommen auf den ersten Theil 24; von 1 Einheit kommt $\frac{24}{24+12+60}$ und von 800 Einheiten kommen auf denselben $\frac{24\times800}{24+12+60}=\frac{2\times800}{2+1+5}=200$. Ebenso findet man, daß auf den zweiten Theil $\frac{12\times800}{24+12+10}=\frac{800}{2+1+5}=100$, und auf den dritten Theil $\frac{60\times800}{24+12+60}=\frac{5\times800}{2+1+5}=500$ kommen.

Anmerkung. Wie man aus diesem Beispiele sieht, kann man die Zahlen, welche den Maßstab der Vertheilung ausdrücken, durch dieselbe Zahl dividiren, wodurch die Rechnungen sich vereinfachen lassen, wenn diese Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Denn, wenn von $24+12+60=$ Einheiten auf den ersten Theil 24, auf den zweiten 12 und auf den dritten 60 kommen, so kommen von $2+1+5=8$ Einheiten auf den ersten Theil 2, auf den zweiten 1 und auf den dritten 5; und von 800 kommen also auf den ersten Theil 200, auf den zweiten 100 und auf den dritten 500.

223. **Aufgabe 4.** $^5/_9$ in vier Theile zu zerlegen, so daß der erste Theil $^1/_2$ einer gewissen Größe, der zweite $^2/_3$, der dritte $^3/_4$, der vierte $^1/_6$ derselben enthalte.

Auflösung. $^1/_2+^2/_3+^3/_4+^1/_6=^{25}/_{12}$ dieser Größe macht $^5/_9$; die Größe ist also $^5/_9 : ^{25}/_{12}=^4/_{15}$, und der erste Theil macht $^4/_{15}\times^1/_2=^2/_{15}$, der zweite $^4/_{15}\times^2/_3=^8/_{45}$, der dritte $^4/_{15}\times^3/_4=^1/_5$ und der vierte $^4/_{15}\times^1/_6=^2/_{45}$.

Anmerkung. Man kann auch die verschiedenen Zahlen, welche den Maßstab der Vertheilung enthalten, durch dieselbe Zahl multipliziren. Denn wenn der erste Theil $^1/_2$, der 2te $^2/_3$, der 3te $^3/_4$, der 4te $^1/_6$ einer gewissen Größe enthält, so enthält der erste $^5/_2$, der 2. $^{10}/_3$, der 3. $^{15}/_4$, der 4te $^5/_6$ einer andern Größe, die 5 mal kleiner ist als die erste. Wählt man bei Brüchen zu dieser Multiplication den gemeinschaftlichen Nenner, so vermeidet man die Brüche. Bei obiger Aufgabe ist das Zwölftel der zu bestimmenden Größe in dem ersten Theile 6 mal, im 2ten 8 mal, im 3ten 9 mal, im 4ten 2 mal und in $^5/_9$ also 25 mal enthalten. Dieses Zwölftel ist also $^5/_9 : 25=^1/_{45}$, und der erste Theil macht $^6/_{45}=^2/_{15}$, der zweite $^8/_{45}$, der dritte $^9/_{45}=^1/_5$ und der vierte $^2/_{45}$.

224. **Aufgabe 5.** 260 Franken so unter A, B und C zu vertheilen, daß B $^3/_4$ Fr. erhalte, wenn A $^1/_2$, und C $1^1/_2$ erhalte, wenn B $^2/_5$ erhält.

Auflösung. Wenn A $^1/_2$ Fr. erhält, bekommt B $^3/_4$, wenn A $^1/_2 \times ^2/_5 = ^1/_5$ erhält, bekommt B $^3/_4 \times ^2/_5 = ^3/_{10}$.

Wenn B $^2/_5$ erhält, bekommt C $^3/_2$; wenn B $^2/_5 \times ^3/_4 = ^3/_{10}$ erhält, bekommt C $^3/_2 \times ^3/_4 = ^9/_8$. Oder, indem man diese Brüche durch den gemeinschaftlichen Nenner 40 multiplizirt, wenn A 8 erhält, bekommt B 12 und C 45. Von 260 Franken erhält also A $\frac{260 \times 8}{8+12+45} = 32$, B $\frac{260 \times 12}{8+12+45} = 48$ und C $\frac{260 \times 45}{8+12+45} = 180$.

225. Dient die Repartitionsrechnung dazu, den Gewinn (Dividende) oder Verlust bei einer gemeinschaftlichen Unternehmung auf die einzelnen Theilnehmer nach dem Maßstabe ihrer Betheiligung zu vertheilen, so heißt sie **Gesellschaftsrechnung.**

Aufgabe 6. Drei Kaufleute haben auf einem gemeinschaftlichen Handel 450 Thaler gewonnen. Die Einlage des A betrug 1200, die des B 800, die des C 500 Thlr.; wieviel erhält jeder vom Gewinn?

Auflösung. Von 25 Thlr. erhält A 12, B 8 und C 5; von 450 Thlr. erhält A $\frac{12 \times 450}{25}$ Thlr. = 216 Thlr., B $\frac{8 \times 450}{25}$ Thlr. = 144 Thlr. und C $\frac{5 \times 450}{25}$ Thlr. = 90 Thlr.

226. Eine derartige Rechnung, bei der auch die Zeit, während welcher die Einlage dauerte, mit in Betracht kommt, heißt **zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.**

Aufgabe 7. Bei einer gemeinschaftlichen Unternehmung schießt A 1000 Gulden vor während 2 Jahren, B 1500

Gulden während 18 Monaten und C 2000 Gulden während 15 Monaten. Wie haben sie den Gewinn, welcher 1080 Gulden beträgt, untereinander zu theilen?

Auflösung. A hat Recht auf 1000×24 mal den durchschnittlichen Gewinn von einem Gulden während eines Monates; B hat Recht auf 1500×18 mal diesen Gewinn,
C hat Recht auf 2000×15 mal diesen Gewinn;
oder A hat Recht auf 10×24 mal das Hundertfache dieses Gewinnes,
B hat Recht auf 15×18 mal das Hundertfache dieses Gewinnes,
C hat Recht auf 20×15 mal das Hundertfache dieses Gewinnes;
oder A hat Recht auf 8 mal das Dreißigfache obiger Summe,
B auf 9 mal das Dreißigfache dieser Summe, und
C auf 10 mal das Dreißigfache dieser Summe. Dieses Dreißigfache ist demnach 27 mal in 1080 Gulden enthalten und beträgt mithin 40 Gulden; und A erhält 40×8=320 Gulden, B 40×9=360 Gulden und C 40×10=400 Gulden.

Anmerkung 1. Man hätte auch nach Anmerk. zu 222 die Zahlen, welche den ersten Maßstab der Vertheilung bildeten, durch 3000 dividiren können.

Anmerkung 2. Aehnliche Beispiele werden in allen Lehrbüchern der Arithmetik angeführt, um zu zeigen, wie eine Vertheilung zu machen ist, wenn verschiedenartige Umstände dabei zu berücksichtigen sind; im gewöhnlichen Leben kommen sie selten oder nie vor, weil sie gar nicht passen auf die Verhältnisse, unter welchen Handelsverbindungen statt finden.

Aufgaben.

1. A und B haben zusammen 280 Franken; A hat soviel Fünffrankenstücke, als B Zweifrankenstücke hat. Wieviel hat Jeder?

2. Ein Onkel hinterläßt den Kindern seiner drei Brüder 3080 Fl. Der erste Bruder hatte 3, der zweite 5, der dritte 6 Kinder; wieviel erhält jedes Kind? Auf jede Familie kommt gleichviel.

3. A hat soviel Thlr., als B Franken, als C rhein. Gulden, als D Fünffrankenstücke, als E österr. Fl. hat. Alle zusammen haben 268 Thlr. 20 Sgr. Wieviel hat Jeder?

4. 860 Franken sollen so unter A, B, C und D vertheilt werden, daß A die Hälfte und B das Drittel von dem Antheile des C und dieser selbst $^2/_3$ von dem des D erhalte.

5. Wieviel erhält Jeder (vor. Aufg.), wenn auch E sich noch daran betheiligt und $^3/_4$ vom Antheile des B bekommen soll?

6. Jemand schuldet an A 2500 Fr., an B 3600, an C 4200 und an D 5400 Fr. Er hinterläßt bei seinem Tode nur 5024 Franken. Wieviel erhält jeder Gläubiger?

7. Ein Kaufmann hinterläßt eine Summe von 5400 Franken, welche unter 4 Gläubiger vertheilt werden soll. Der erste hat ein Guthaben von 2000 Franken, der zweite von 3000 Franken, der dritte von 4500 Franken und der vierte von 1800 Franken; wieviel erhält Jeder?

8. Wie kann man 1800 Thlr. so unter A, B und C theilen a) daß B 2 mal und C 3 mal so viel erhalte als A, b) daß B 2 mal und C 5 mal so viel erhalte, als A; c) daß B 3 mal so viel als A, und C 2 mal so viel als B erhalte; d) daß B 2 mal so viel als A, und C 3 mal so viel, als B erhalte; e) daß A so viel als B, und C 3 mal so viel als A erhalte; f) daß die Hälfte des Antheiles von A, $^1/_3$ des Antheiles von B und $^1/_4$ des Antheiles von C gleich seien; g) daß die Hälfte des Antheiles von A, $^1/_3$ des Antheiles von B und $^1/_7$ des Antheiles von C gleich seien; h) daß $^1/_5$ des Antheiles von A, $^1/_6$ des Antheiles von B und $^1/_7$ des Antheiles von C gleich seien; i) daß $^1/_4$ des Antheiles von A und $^1/_5$ des Antheiles von B gleich seien, und C so viel erhalte, als A und B zusammen; k) daß der Antheil von B die $^3/_5$ des Antheiles von A betrage und C 200 Thlr. mehr bekomme als beide zusammen.

1) daß B 3 mal so viel als A, und C so viel erhalte, als das Doppelte des Antheiles von A und der Antheil von B beträgt.

9. Unter drei Beamte soll eine Gratification von 830 Franken so vertheilt werden, daß jeder in dem Maße weniger erhalte, als sein Gehalt größer ist. Der erste hat ein Gehalt von 1750 Fr., der zweite von 1000, der dritte von 1250 Fr.

10. Durch eine Feuersbrunst hat A einen Schaden erlitten von 500, B von 1500 und C von 3600 rhein. Gulden. Wie sind 1086 G. 35 Kr., die an milden Beiträgen eingegangen sind, unter diese drei Personen zu vertheilen? Es soll derjenige, welcher einen größern Theil (mehr Procente) seines Vermögens verloren hat, auch einen größern Antheil erhalten; das Vermögen von A vor der Feuersbrunst wird geschätzt auf 2000, das von B auf 3000 und das von C auf 6000 Gulden.

11. Bei einer gemeinschaftlichen Unternehmung hat sich A mit 2000, B mit 3600, C mit 1800 und D mit 1600 Gulden betheiligt. Wie wäre demnach a) ein Gewinn von 1800 Gulden, b) ein Verlust von 360 Gulden unter die Theilnehmer zu vertheilen?

12. Wie wäre derselbe Gewinn und Verlust zu theilen, wenn A und C nur 6 Monate, B 9 Monate und C ein Jahr mit ihren Capitalien sich am Geschäfte betheiligt hätten?

13. Bei einem Geschäfte, welches mit einem Capitale von 9000 Fr. betrieben wird, gewährt man einem Commis eine Tantième von 18 % vom Gewinne; $\frac{1}{2}$ Jahr nach Eröffnung des Geschäftes betheiligt er sich an demselben mit einer Summe von 1200 Fr., und 18 Monate später zeigt es sich, daß das Geschäft einen Reingewinn von 1980 Fr. abgeworfen hat. Wie groß ist der Antheil des Commis?

14. Vier Arbeiter arbeiten 71 Tage nacheinander; der erste verdient täglich $2\frac{1}{2}$, der zweite 3, der dritte 4, der vierte 5 Franken; hernach erhalten sie gleichviel. Wie lange hat Jeder gearbeitet?

15. Drei Arbeiterabtheilungen haben für eine Arbeit $858\frac{1}{2}$ Thlr. erhalten. Die erste Abtheilung bestand aus 26 Mann, welche 19 Tage und täglich 10 Stunden, die zweite bestand aus 30 Mann, welche 18 Tage und 12 St. tägl., die dritte bestand aus 40 Mann, welche 12 Tage und 13 St. tägl. gearbeitet haben; wieviel erhält jede Abtheilung?

16. In einer belagerten Stadt sind vier Mühlen; die erste kann täglich 3, die zweite 4, die dritte 5, die vierte 9 Säcke mahlen. Man will sobald als möglich 648 Säcke mahlen lassen; wieviel Tage sind dazu erfordert, und wieviel Säcke muß man auf jede Mühle schicken?

17. Eine Mauer die 30 Fuß lang, 15 Fuß hoch und 2 Fuß breit ist, und eine andere, die 40 Fuß lang, 3 Fuß breit und 10 Fuß hoch ist, kosteten zusammen 1000 Franken. Wieviel kostete jede?

18. A und B setzen sich auf einer Reise zusammen, um ihr Mittagsbrod zu verzehren; A hat 5, B hat 3 Brode. C bittet sie, ihn an ihrem Mahle Theil nehmen zu lassen, und bezahlt nachdem alle drei Alles aufgegessen 16 Silbergroschen. Wieviel kommt dem A zu, und wieviel dem B?

Mischungsrechnung.

227. Die Durchschnitts- oder Vertheilungsrechnung heißt **Mischungsrechnung**, wenn sie dazu dient, den Werth einer Maßeinheit von einer Mischung zu berechnen, deren Bestandtheile man kennt, oder umgekehrt, ihre Bestandtheile oder deren Werth zu ermitteln, wenn man den Werth einer Maßeinheit der Mischung kennt.

Aufgabe 1. Man hat $10\frac{1}{2}$ ℔ à 91 Ct. und $4\frac{2}{3}$ ℔ à 65 Ct. gemischt, welches ist der (durchschnittliche) Preis eines ℔ dieser Mischung?

Aufl. $10\frac{1}{2}$ ℔ à 91 Ct. kosten . . . $955\frac{1}{2}$ Ct.;
$4\frac{2}{3}$ ℔ à 65 Ct. kosten . . . $303\frac{1}{3}$ Ct.;

Die $15\frac{1}{6}$ ℔ der Mischung kost. also $1258\frac{5}{6}$ Ct., und
1 ℔ kostet demnach $1258\frac{5}{6}$ Ct.: $15\frac{1}{6}$ = 83 Ct.

228. **Aufgabe 2**. Wieviel Liter Wein à 91 Ct. und à 65 Ct. muß ein Wirth zusammen mischen, um $15\frac{1}{6}$ Liter à 83 Ct. zu erhalten?

Auflösung. Wenn der Wirth $15\frac{1}{6}$ Liter der ersten Sorte zu 83 Ct. verkaufte, so verlöre er 8 Ct. $\times 15\frac{1}{6} = 121\frac{1}{3}$ Ct. So oft er aber einen Liter von 91 Ct. durch einen Liter von 65 Ct. ersetzt, so oft vermindert er seinen Schaden um 26 Ct.; um sich also schadlos zu halten, muß er so viele Liter der bessern Qualität durch Liter der schlechtern ersetzen, als Summen von 26 Ct. in $121\frac{1}{3}$ Ct. enthalten sind, also $4\frac{2}{3}$ Liter. Seine Mischung besteht also aus $4\frac{2}{3}$ Liter der schlechtern und $15\frac{1}{6}-4\frac{2}{3}=10\frac{1}{2}$ der bessern Qualität.

229. Aufgabe 3. Man mischt 45 Liter à 74 Ct., 54 Liter à 79 Ct. und 81 Liter à 90 Ct.; wieviel kostet ein Liter der Mischung (oder ein Liter im Durchschnitt)?

Auflös. 45 L. à 74 Ct. kosten . . . . 3330 Ct.;
54 L. à 79 Ct. kosten . . . . 4266 Ct.;
81 L. à 90 Ct. kosten . . . . 7290 Ct.;

Die 180 L. der Mischung kost. also 14886 Ct.; und
1 L. der Misch. kostet demnach $82\frac{7}{10}$ Ct.

230. Aufgabe 4. Ein Goldarbeiter hat 180 Gramm Gold à 0,827 fein erhalten, indem er zu 54 Gr. 0,790 feinem und 81 Gr. 0,900 feinem Gold eine dritte Sorte beimischte; wie fein war diese dritte Sorte? Gold, das 0,827 fein ist, ist eine Mischung von welcher $\frac{827}{1000}$ des Gewichtes reines Gold, das übrige Kupfer ist.

Aufl. 54 Gr. Gold à 0,790 enth. 42,660 Gr. r. G.,
81 Gr. Gold à 0,900 enth. 72,900 Gr. r. G.;

Diese 135 Gr. enthalten also . . . 115,560 Gr. r. G.,
Die 180 Gr. d. M. à 0,827 enth. 148,860 Gr. r. G.;

Die übr. 45 Gr. enthielten demnach 33,300 Gr. r. G.,
und 1 Gr. dieser Sorte enthält 0,740 Gr. r. G.;

d. h. die 45 Gr. dieser dritten Sorte sind 0,740 fein.

231. Aufgabe 5. Ein Goldarbeiter braucht 18 Kilogr. Silber, das 0,827 fein sein soll; er hat 8ᴷ·,1 Silber à 0,900, die er sämmtlich in die Mischung aufnehmen will; wieviel Silber à 0,740 und à 0,790 muß er zumischen? Ein Kilogramm Silber à 0,827 fein, enthält 827 Gr. reines Silber.

Aufl. 18 K. Silber à 0,827 enthalten 14886 Gr. r. S.
8ᴷⁱˡᵒᵍʳ·,1 Silber à 0,900 enth. 7290 Gr. r. S.
Hierzu muß er also noch mischen
9ᴷⁱˡᵒᵍʳ·,9 Silber, welche enth. . 7596 Gr. r. S.;
nähme er diese von der Sorte à 0,740,
so gäbe dieß . . . . 7326 Gr. r. S.;
mithin würde der Mischung noch fehlen 270 Gr. r. S.

So oft er nun ein Kilogr. à 0,740 durch 1 Kilogr. à 0,790 ersetzt, erhält seine Mischung 50 Gramm mehr. Da sie 370 Gramm zu wenig hat, muß er 270 : 50 = 5ᴷⁱˡᵒᵍʳ·,4 von den 9ᴷⁱˡᵒᵍʳ,9 à 0,740 durch eben so viele Kilogramm à 0,790 ersetzen, oder 4ᴷⁱˡᵒᵍʳ·,5 à 0,740 und 5ᴷⁱˡᵒᵍʳ·,4 à 0,790 nehmen.

Aufgaben.

1. Man mischt unter 16 Malter Waizen zu 40 Franken, 10 Malter Roggen zu 32 Franken; wieviel kostet ein Malter von dem Mengkorn?

2. Ein Wirth mischt 60 Liter Wein à 40 Ct., 50 Liter à 30 und 20 Liter à 65 Ct.; wie hoch kommt ein Liter der Mischung zu stehen?

3. Die Bronze einer Kanone von 1200 ℔ enthält 3 Gewichtstheile Zinn und 2 Gewichtstheile Messing auf 26 Theilen Kupfer; wieviel ℔ von jedem dieser Bestandtheile enthält sie?

4. Wieviel Kaffee à 17 und à $6^1/_2$ Sgr. per ℔ muß man zusammen mischen, um 105 ℔ à $12^1/_2$ Sgr. zu erhalten?

5. Wieviel Wasser muß man zu 4 Hektoliter Wein à 60 Ct. per Liter zugießen, damit der Liter bloß 50 Ct. zu stehen komme?

6. Der Preis einer Mischung von 180 Liter Wein à 74 Ct., à 79 Ct. und à 90 Ct. betrug $82^7/_{10}$ Ct. — Man hatte 45 Liter der

ersten Sorte genommen; wieviel wurden von der zweiten und dritten Sorte beigemischt? Wie dient diese Aufgabe der Aufgabe von Nr. 229 zur Probe? Man stelle zwei ähnliche Aufgaben auf, die ihr ebenfalls zur Probe dienen.

7. Wieviel kosten 8000 Kilogr. Bronze, die bereitet wurde, indem man 3 Kilogr. Kupfer mit 1 Kilogr. Zinn zusammenschmolz, wenn der Kilogramm Kupfer 2Fr.,70 und der Kilogr. Zinn 2Fr.,20 kostete?

8. Der Messing wird bereitet, indem man 3 Gewichtstheile Zink und 7 Gewichtstheile Kupfer zusammenschmilzt. Wieviel ist 1 Kilogr. Messing werth, wenn der Kilogr. Kupfer 2Fr.,70 und der Kilogramm Zink 0Fr.,90 kostet?

9. Jemand verzehrt täglich 2Fr.,50, und an den Tagen, wo er arbeitet, gewinnt er 3Fr.,75. Er war in 10 Wochen einige Tage verhindert zu arbeiten und er hat nie Sonntags gearbeitet. Wieviel Werktage war er verhindert, da er in den 10 Wochen 27Fr.,50 übrig behielt.

10. Man mischt den Wein, der in zwei gleich großen Fässern enthalten ist, und will wissen, wie hoch ein Liter der Mischung zu stehen kommt. Man weiß, daß das erste Faß 337Fr.,50, und das andere 300 Fr. kostete, und der Wein aus dem ersten Faß 15 Ct. auf dem Liter mehr kostete, als der Wein aus dem andern.

11. 1 Deciliter Schwefelsäure, mit 2 Hektoliter 30 Liter Wasser vermischt, hat bisweilen einen außerordentlich vortheilhaften Einfluß auf den Graswuchs einer Wiese geübt. Wieviel Schwefelsäure müßte man in einen Behälter von 35 Meter Länge, 3 Meter Breite und 1,50 Meter Tiefe gießen, um dieselbe Wirkung hervorzubringen?

12. Mischt man 30 Liter Rhein- und 20 Liter Moselwein, so kostet der Liter 1Fr.,30; mischt man 20 Liter Rhein- und 30 Liter Moselwein, so kostet er 1Fr.,20. Was kostet jede Sorte?

13. Ein Kaufmann hat ein Stück Tuch gekauft zu 10 Franken den Meter; er verkauft die Hälfte zu 12 Franken den Meter; $^1/_6$ zu 10 Franken; $^1/_4$ zu 13 Franken und das übrige zu 12Fr.,50. Im Ganzen gewinnt er 30 Fr.; wieviel Ellen enthielt das Stück?

14. Wie kann man mit Wein à 62 und à 45 Ct. per Liter eine Mischung bereiten, von welcher der Liter 50 Ct. kostet?

Anmerkung. Man weise nach, daß die zu suchenden Zahlen nicht vollständig bestimmt sind, und man beantworte folgende Fragen: a) Wieviel Wein à 45 Ct. muß man auf 1 Liter à 62 nehmen? b) wieviel auf 2 Liter à 62? c) wieviel auf 20 Liter à 62? d) wieviel auf 60 Liter à 62? e) wieviel Wein à 62 Ct. muß man auf 1 Liter à 45 nehmen? f) wieviel auf 2 Liter à 45? g) wieviel auf 20 Liter à 62? h) wieviel auf 60 Liter à 62? i) wieviel muß man von beiden Sorten nehmen, um 1 Liter à 50 zu erhalten? k) um 3 Liter à 50 zu erhalten? l) um 340 Liter à 50 zu erhalten? m) welche ist die richtige Lösung in den kleinsten ganzen Zahlen? (Vergl. 135.)

15. Wieviel Gramm Gold à 0,920 und à 0,750 fein muß man zusammenschmelzen, um Gold à 0,840 zu erhalten? (Die einfachste Lösung in ganzen Zahlen.)

16. Vier Sorten à 16, 18, 25 und 30 Kr. per ℔ sind zu einer Mittelsorte à 20 Sgr. zu mengen; wieviel ℔ sind von jeder zu 120 ℔ der Mittelsorte zu nehmen: a) wenn man von den beiden ersten und von den beiden letzten gleichviel; b) wenn man von der ersten 2 mal so viel als von der zweiten und von der dritten 2 so viel als von der vierten; c) wenn man von der zweiten 2 mal so viel als von der ersten und von der vierten 2 mal so viel als von der dritten nehmen will?

17. Mit Wein à 60, à 45 und à 40 Ct. per Liter will man eine Mischung bereiten, welche 50 Ct. per Liter zu stehen komme; wieviel muß man von jeder Sorte nehmen? Hier bestimmen ebenfalls die Angaben die zu suchenden Zahlen nicht; man löse die Aufgabe indem man noch folgende Angaben hinzufügt: a) die Mischung soll 2 Liter betragen und nur aus Wein von der ersten und letzten Qualität bestehen; b) die Mischung soll 3 Liter betragen und nur aus den beiden ersten Qualitäten bestehen; c) die Mischung soll 140 Liter betragen und gleichviel Wein der beiden letzten Sorten enthalten; d) die Mischung soll 250 Liter betragen und gleichviel Wein der beiden ersten Sorten enthalten; e) die Mischung soll 160 Liter betragen und gleichviel Wein von der ersten und letzten Sorte enthalten; f) die Mischung soll 24 Liter der letzten und 32 der ersten enthalten; g) die Mischung soll 24 Liter der zweiten und 30 der ersten enthalten?

18. Wie kann man aus einer Auflösung obiger Aufgabe andere Auflösungen machen? Z. B. durch wieviel Liter der zweiten Sorte muß man 10 Liter der letzten ersetzen, um denselben mittleren Preis von 50 Ct. beizubehalten? Man gebe noch 6 Lösungen derselben Aufgabe.

Gold- und Silberrechnung und Münzrechnung.

232. **Gold** und **Silber** kommen in der Regel nicht vollkommen rein in den Handel, sondern legirt, d. h. mit geringerm Metalle, gewöhnlich mit Kupfer, zusammengeschmolzen. Dadurch werden sie auch härter und nutzen sich weniger ab. Die im Handel üblichen Preisnotirungen von Gold und Silber beziehen sich aber auf das in einer Mischung enthaltene reine Metall. [1]) Für den Kupferzusatz wird nur dann etwas vergütet, wenn derselbe verhältnißmäßig sehr bedeutend ist; in den andern Fällen kann er sogar wegen der Scheidungskosten und des Schmelzungsverlustes den Werth des edlen Metalles vermindern. Das Gewicht des legirten Metalles heißt dessen **rauhes** Gewicht; das Gewicht des darin enthaltenen reinen Metalles heißt dessen **feines** Gewicht. [2]) 30 Thaler wiegen $1\frac{1}{9}$ ℔ rauh und 1 ℔ fein, heißt also: 30 Thlr. wiegen $1\frac{1}{9}$ ℔ und enthalten 1 ℔ reines (feines) Silber.

233. Das feine Gewicht bildet also einen Bruch des rauhen Gewichtes; dieser Bruch bezeichnet die **Feinheit** (den Feingehalt) des legirten Metalles. Legirtes Silber, dessen Feinheit mit $\frac{3}{4}$ bezeichnet wird, enthält also $\frac{3}{4}$ seines Gewichtes reines Silber und $\frac{1}{4}$ Kupfer. Man pflegt

[1]) Nur England macht hierin eine Ausnahme. Siehe Aufg. 11, Seite 256.

[2]) Man könnte das rauhe Gewicht Bruttogewicht und das feine Gewicht Nettogewicht nennen.

aber heute in den meisten Ländern diese Feinheit in Tausendteln auszudrücken; in obigem Falle wird sie also bezeichnet durch 0,750. In Deutschland wandte man bis zur letzten Zeit eine andere Weise an, die Feinheit zu bezeichnen, welche aber zum Theile schon gesetzlich beseitigt ist und bald wohl gänzlich außer Gebrauch kommen wird. Man bezeichnete nämlich, wieviel Karat oder Grän reines Gold in einer Mark rauhen Goldes, und wieviel Loth oder Grän reines Silber in einer Mark rauhen Silbers enthalten sei, und theilte zu dem Zwecke die Mark für das Gold ein in 24 Karat à 12 Grän und für das Silber in 16 Loth à 18 Grän. Gold à 0,750 fein hieß demnach 18 karatig oder 316 gränig und Silber à 0,750 fein hieß 12 löthig oder 316 gränig.

234. Zum Wiegen des Goldes bedient man sich aber auch heute noch vielfach in Deutschland der kölnischen Mark, welche man zu diesem Zwecke (beim Gold wie beim Silber) in 16 Loth à 4 Quent eintheilt. Ihr ursprüngliches Gewicht ist unbekannt, seit 1838 aber auf 133 Gramm,8555 (= $\frac{1}{2}$ frühere preuß. Pfund) festgesetzt. Zum Theil ist aber bereits das Zollpfund (= $\frac{1}{2}$ Kilogr.) als Gold- und Silbergewicht gesetzlich (Preußen, Sachsen, Frankfurt a. M.) oder wenigstens durch den Gebrauch eingeführt (Wien, Augsburg).

Die deutschen Goldarbeiter wenden auch noch an das Ducatengewicht, (67 Ducaten = 1 Mark) und das Kronengewicht ($69\frac{1}{3}$ Kr. = 1 Mark; in Bayern 72 Kr. = 1 Mark.)

235. Münzrechnung. Gold und Silber bilden in den civilisirten Ländern das gewöhnliche Tauschmittel beim Handel; zu dem Zwecke werden von den Regierungen diese Metalle in Stücken von bestimmtem Feingehalt und Gewicht geprägt, welche **Münzen** heißen, und denen irgend ein Name beigelegt wird, z. B. Franke, Thaler. Dieser Name

heißt der **Nominalwerth** der Münzen; der eigentliche Werth derselben wird vom Volke bestimmt und besteht in der größern oder kleinern Quantität von Waaren, z. B. Getreide, welche für einen Franken, Thaler gegeben wird. So hatte z. B. ein Franke vor dreißig Jahren dasselbe Gewicht, dieselbe Feinheit, denselben Namen und Nominalwerth, als heute, aber sein eigentlicher Werth war bedeutender, weil man dafür mehr Waaren erhielt. Der eigentliche Werth der Münzen hängt ab von dem Werthe des Silbers und des Goldes. Ein Pfund geprägten Silbers oder Goldes wird man allezeit einem Pfunde ungeprägten Silbers oder Goldes vorziehen, weil ersteres in bestimmten Stücken abgewogen, dessen Feingehalt amtlich bestätigt ist und also bequemer ist beim Handel; man wird z. B. kein Fünffrankenstück geben für ein Stück Silber von 25 Gramm à 0,900 fein. Der Preis des in einer Münze enthaltenen Goldes oder Silbers heißt ihr **Metallwerth**; dasjenige, was er weniger beträgt, als der Nominalwerth, heißt der **Prägeschatz**, weil es dazu dient die Prägekosten zu bestreiten. — Oft bestimmen (valviren) die Regierungen, zu welchem Werthe (in dem Gelde, nach welchem im Lande gerechnet wird) die im Lande circulirenden Münzen (namentlich in den öffentlichen Kassen) angenommen werden sollen: dieser Werth der Münzen heißt ihr **Valvationswerth**. Ausländische Münzen können, je nach den Handelsverbindungen eines Ortes, zu Zahlungen sich mehr oder weniger eignen und seltener oder häufiger vorhanden sein, wegen dieser Umstände ist der Preis, den man im Handel für dieselben bezahlt, etwas schwankend: dieser Preis heißt ihr **Handelswerth** oder ihr **Curs**. Auch inländische Münzen, welche nicht als gesetzliches Zahlungsmittel dienen, sind oft den Schwankungen des Curses unterworfen.

236. Das feine Gewicht (Nettogewicht) der Münzen heißt **Korn**; ihr rauhes Gewicht (Bruttogewicht) heißt **Schrot.** Da es sehr kostspielig wäre, den Münzen sehr exact ihre gesetzliche Feinheit und ihr gesetzliches Gewicht zu geben, so wird geduldet, daß sie um ein bestimmtes Maß schwerer oder leichter und meistens auch noch, daß sie um ein bestimmtes Maß mehr oder weniger fein seien. Diese doppelte geduldete Abweichung heißt **Remedium** (tolérance).

Die Erfahrung hat gezeigt, daß sie meistens abweichen im Sinne minderer Feinheit und leichteren Gewichtes, ihr durchschnittlicher Metallwerth entspricht also nicht ganz den gesetzlichen Bestimmungen, und theils deswegen, theils wegen des Gewichtsverlustes, der durch die Abnutzung entsteht, wird häufig bei Berechnung des Metallwerthes das Remedium in Abzug gebracht.

237. Münzen von geringerem Betrage, welche nicht zu (bedentendern) Zahlungen gebraucht werden, sondern nur zur Ausgleichung von Zahlungen (wie Sous, Silbergr., Kreuzer) heißen **Scheidemünze.** Sie werden aus Kupfer, Bronze, Nickel oder Billon (Silbermischung, die mehr Kupfer als Silber enthält) geprägt, und ihr Metallwerth steht fast überall ziemlich tief unter ihrem Nominalwerthe.

Rechnungsmünze ist eine Wertheinheit von bestimmtem Gewicht und Gehalt, nach welcher gerechnet wird, ohne daß ihr eine Münze entspricht, wie z. B. Hamburger Bancomark.

Papiergeld heißt jeder Schein, der vom Staate als gesetzliches Zahlungsmittel anerkannt wird. Man unterscheidet Staatspapiergeld (Kassenscheine) und Privatpapiergeld (Banknoten, z. B. der internationalen Bank von Luxemburg). Wenn der Staat zu viel Papiergeld emittirt, oder wenn die Sicherheit, daß es zu seinem vollen Nominalwerth eingelöst werde, aufhört, so sinkt dessen Curs unter den Nominalwerth; in andern Fällen kann er wegen der größern Bequemlichkeit, die es für den größern Verkehr gewährt, sogar über das Pari (den Nominalwerth) steigen.

238. Das gesetzliche Münzsystem eines Landes heißt die **Währung.**

Man unterscheidet Gold-, Silber- und Doppel-Währung. Bei der **Goldwährung** bezeichnet die Einheit der Zahlungsmünze (in England z. B. das Pfund Sterling) ein gewisses Gewicht geprägten Goldes. Der Werth der Münzen muß also sinken und der Preis der Waaren steigen, wenn das Gold häufiger wird. Silber ist in dem Falle bloß Scheidemünze und der Metallwerth des Silbergeldes steht unter dessen Nominalwerth. Bei der **Silberwährung** wird die Zahlungsmünze aus Silber geprägt (in Preußen ist z. B. 1 Thaler = $^1/_{30}$ ℔ fein Silber); der Preis der Waaren wird demnach steigen, wenn das Silber an Werth verliert. In Ländern, welche die Silberwährung haben, richtet sich der Werth der Goldstücke nach dem Preise des Goldes, und dieselben werden meist von Zeit zu Zeit von den Regierungen valvirt nach dem Verhältnisse, das zwischen Gold und Silber besteht, d. h. nach der Zahl, welche ausdrückt, wieviel ℔ Silber man geben muß für 1 ℔ Gold. Bei der **Doppelwährung** wird die Zahlungsmünze aus Gold und Silber geprägt (in Frankreich z. B. ist 1 Franke = 5 Gramm geprägten Silbers à 0,900 = 5 Gr. : $15^1/_2$ in geprägtem Gold à 0,900). In diesem Falle ist das Verhältniß zwischen Gold und Silber gesetzlich festgesetzt.

239. Der **Münzfuß** bezeichnet die Zahl der Münzeinheiten (z. B. Thaler), die auf eine Gewichtseinheit (in Deutschland z. B. ein Pfund = $^1/_2$ Kilogr.) feinen Silbers (oder Goldes) geprägt werden. Die norddeutsche Währung hat den 30 Thalerfuß, die süddeutsche den $52^1/_2$ Guldenfuß, die österreichische den 45 Florinfuß, d. h. aus dem feinen Pfund Silber prägt man in Norddeutschland 30 Thaler, in Süddeutschland $52^1/_2$ Gulden, in Oesterreich 45 Florin.

Aufgaben.

1. Wieviel Kupfer muß man mit 120 Gramm reinem Silber verschmelzen, um a) Silber à 0,850, b) 12 löthiges Silber zu gewinnen?

2. Ein Goldbarren von 600 Gramm à 0,840 ist so viel werth, als ein anderer von 400 Gramm und als ein dritter à 0,700; wie fein ist der zweite und wie schwer ist der dritte?

3. Wieviel Gramm reines Gold ist in 25 Dekagramm Gold à 0,840 fein enthalten? wieviel Gramm Gold à 0,632 läßt sich daraus herstellen?

4. Wieviel Mark Silber à 13 Loth 16 Gramm fein kann man durch Kupferzusatz herstellen aus 62 Mark 18 Loth Silber, welches 12 Loth 4 Gramm fein ist?

5. Wieviel kosten in Paris a) 15 Kilogr. Silber à 0,910 mit 18‰ prime; b) 12 Kilogr. Silber à 0,850 mit 22‰ prime; c) 600 Gramm Gold à 0,920 mit 1‰ prime? Nach dem Tarif von 1803 (ancien tarif) kostet das Kilogr. reines Gold 3434Fr.,44 und das Kilogr. reines Silber 218Fr.,89. 18‰ prime bedeutet eine Erhöhung dieses Normalpreises von 18‰. Eine Verminderung dieses Preises wird mit perte bezeichnet.

6. Metall, welches Gold und Silber enthält, heißt güldisches Metall; wieviel ist ein güldischer Barren von 5 ℔ werth, der 0,750 Gold und 0,175 Silber enthält, wenn man das ℔ fein Gold zu 797 Gulden 30 Kreuzer, das ℔ fein Silber zu 51 G. 40 Kr. rechnet?

7. Wie schwer und fein ist nach der heutigen Bestimmung

a) ein Silberbarren, der nach bisherigem Gewicht 15 Mark (Köln) und 8 Loth wog, und nach der bisherigen Feinheitsbestimmung 12 löthig war;

b) ein Barren Silber von 10 Mark 12 Loth und 2 Quent à 12 Loth 9 Grän fein;

c) ein Barren 20karatigen Goldes von 10 Mark;

d) ein Goldbarren, der 4 Mark 3 Loth und 1 Quent wiegt bei 20 Karat 6 Grän Feinheit?

8. Wie wird nach der früheren deutschen Weise (die in Schweden, Norwegen, Dänemark, &c. noch üblich ist) die Feinheit a) von Gold, b) von Silber bestimmt, welche jetzt bezeichnet wird durch 0,900—0,875—0,750?

9. In Rußland bezeichnet man mit dem Ausdrucke „Probe 85.48" Silber oder Gold, das auf 1 ℔ (= 96 Solotnik à 96 Doli) 83 Solotnik 48 Doli reines Metall und 8 Solotnik 48 Doli Legirung enthält. a) Wie bezeichnen wir solches Metall? b) wie bezeichnen die Russen Silber à 0,810?

10. In England bestimmt man die Feinheit des Goldes nach 24 Karat à 4 Grän, die Feinheit des Silbers nach 12 Unzen à 20

Pennyweights. Das Standard-Gold (Gold der Münzen) ist 22 karatig; das Standard-Silber (Münzsilber) ist 11 oz. 2 dwts. (d. h. 11 Unzen 2 Pennyweights) fein; wieviel Tausendtel ist ihr Standard-Gold und Silber fein?

11. Die Engländer bezeichnen durch „Besser 1 Karath 2 Grän" (B. oder M. 1 car. 2 grs.) Gold, das um 1 Karat 2 Grän besser ist, als Standard-Gold, und durch „Schlechter 15 Pennyweights" (Worse oder W. 15 dwts.) Silber, das um 15 Pennyweights schlechter ist, als Standard-Silber. Wie fein ist demnach solches Gold und Silber, und wie bezeichnen die Engländer a) Gold, b) Silber à 0,900—0,875—0,750 fein?

12. Wie wird der Feingehalt eines Goldbarrens, der 600 Gramm wiegt und 525 Gramm reines Gold enthält, nach der französischen oder neuern deutschen, nach der frühern deutschen, nach der englischen, nach der russischen Weise bezeichnet?

13. Welches ist in Luxemburg der Metallwerth, der Valvationswerth, der Curs eines neuen preußischen Thalers, wenn man das Zollpfund fein Silber berechnet à 29 Thlr. 29 Sgr. (1 Thlr. = $\frac{1}{30}$ ℔ fein), wenn die Thaler valvirt werden à 4 Thlr. = 15 Franken, und im Handel 81 Thlr. = 300 Fr.?

14. Welches ist nach obigen Angaben der Metall-, Valvationswerth und Curs von 100 Fl. österr. Währung, da in allen Beziehungen 1 Fl. = $\frac{2}{3}$ Thlr.?

15. Um wieviel stand in Köln im Februar 1865 der Curs eines Napoleon höher als dessen Metallwerth? Der Curs war notirt à 5 Thlr. $11\frac{1}{4}$ Sgr.; das Zollpfund fein Gold à 461 Thlr. (Nap. = 0,900 fein. S. Nr. 84.)

16. Der Nominalwerth eines Kilogramm gemünzten Silbers à 0,900 fein beträgt in Frankreich 200 Franken; der Nominalwerth gemünzten Goldes von derselben Feinheit und demselben Gewicht ist $15\frac{1}{2}$ mal so groß. Von 1803 bis 1835 betrug der Prägeschatz eines Kilogr. Goldmünzen 9 Fr. und der eines Kilogr. Silbermünzen 3 Fr.; 1835 wurde der Prägeschatz des Goldes auf 6 Fr. per Kilogr., und der des Silbers auf 2 Fr. festgesetzt; 1849 der des Goldes auf 6 Fr., der des Silbers auf 1 Fr.,50; seit 1854 beträgt der Prägeschatz des Goldes 6 Fr.,70, und der des Silbers 1 Fr.,50 per Kilogr. Wieviel beträgt mithin nach den Tarifen von 1803 (ancien tarif, welcher den

Gold- und Silbercursen auch heute noch gewöhnlich zu Grunde liegt), von 1835, 1849 und 1854 der gesetzliche Preis eines Kilogr. ungeprägten Goldes und Silbers à 0,900 und ungeprägten reinen Goldes und Silbers?

17. Die preußische Münze setzt den Prägeschatz von 1 ℔ fein Silber auf 9 Sgr. fest. Wie hoch stellt sie demnach den Werth fest von 1 ℔ ungeprägtem feinen Silber, von 1 Kilogr. (= 2 ℔) ungeprägtem Silber à 0,900 fein; und wie hoch berechnet sie demnach den Metallwerth und die Herstellungskosten eines preußischen Thalers?

18. Ende August 1863 betrug der Preis von 1 Kilogr. fein Silber 218 Fr.,89 mit 17‰ prime; wie hoch stand demnach der Metallwerth eines Fünffrankenstückes?

19. Wieviel Gramm beträgt das Schrot und das Korn a) des Fünffrankenstückes, b) von 800 Fr. in Silber, c) von 300 Fr. in Gold, d) des Zwanzigfrankenstückes?

20. Wieviel beträgt das Schrot und das Korn eines Thalers (seit 1857), eines Guldens österr. Währung, eines Gulden süddeutscher Währung, von 80 Thlr., 120 Fl. österr. Währung, 140 Florin südd. Währung?

21. Nach dem französ. Gesetze über das Remedium dürfen die Gold- und Silbermünzen um 2 Tausendtel Feinheit von den gesetzlichen 900 Tausendtel abweichen; um wieviel % ihres Werthes kann darum im schlimmsten Falle ein 100 Frankenstück, ein 50 Frankenstück und ein Franken unter seinem gesetzlichen Werthe stehen? (Siehe das Remedium des Schrotes, Aufgabe 65, Seite 97.)

22. Nach den Bestimmungen des deutsch-österr. Münzvertrages von 1857 darf die Abweichung im Feingehalte des Ein-Thalerstückes nur 3 Tausendtheile, die Abweichung im Gewichte nur $^4/_{1000}$ des Gewichtes betragen; wieviel ‰ kann also die Abweichung des Kornes betragen?

23. Wieviel Thaler haben dasselbe rauhe Gewicht als 100 Fr. in Silber?

24. Wieviel Franken in Silber haben dasselbe Feingewicht als 30 neue Thaler? Um wieviel ‰ steht demnach preußisches Silbergeld bei uns höher, als französisches von derselben Feinheit und demselben Gewicht, vorausgesetzt, daß dieses ebenso exact nach den gesetzlichen Bestimmungen ausgeprägt sei?

25. Wird französisches oder preußisches Gold höher bezahlt beim Luxemburger Curse: 81 Thlr. = 300 Fr., und beim Kölner Curse (Febr. 65): 1 Fünffrankenstück = 1 Thlr. 10 Sgr. 3 Pf.?

26. Vor 1857 hatte man in Norddeutschland den 14 Thalerfuß, in Oesterreich den Conventions- oder 20 Florinfuß, und in Süddeutschland den 24½ Florinfuß, d. h. aus einer feinen Mark Silber (siehe Nr. 234) prägte man 14 Thlr., 20 österreichische Gulden und 24½ südd. Gulden. Die Thaler waren 12 löthig, die Gulden der öster. Währung 13⅓ löthig und die der südd. Währung 0,900 fein. Wieviel beträgt das rauhe Gewicht, das feine Gewicht dieser Münzen und um wieviel Gramm sind die entsprechenden neuen Münzen seit 1857 leichter oder schwerer geworden?

27. Welches ist der Pariwerth einer deutschen Goldkrone in französischem Gold, d. h. welche Summe in französischen Goldmünzen hat denselben Metallwerth, als eine deutsche Goldkrone? Nach dem Münzvertrag von 1857 wiegen 45 Stück deutsche Goldkronen ein Zollpfund rauh à 0,900 fein.

28. Welches ist in französ. Gold der Pariwerth eines Dukaten; (wird nur mehr in Oesterreich und zwar nur bis Ende 1865 geprägt; 67 Dukaten wiegen eine Mark rauh à 23⅔ Karat); einer preuß. oder sächs. Pistole oder Friedrichsd'or (wiegt 6Gr.,682 rauh à 21⅔ Karat); eines russischen Halbimperial (wiegt 6Gr.,544 rauh à 22 Karat); eines holländ. 10 Florinstückes (wiegt 6Gr.,729 rauh à 0,900 fein); eines englischen Sovereign (wiegt 7Gr.,988 rauh Standard-Gold à 22 Karat); eines nordamerikanisch. Dollars in Gold (wiegt 1Gr.,672 rauh à 0,900 fein)?

29. Welches ist der Pariwerth in französischem Silbergeld von folgenden Silbermünzen: a) eines amerik. Dollars, (wiegt 26Gr.,73 rauh à 0,900 fein); b) eines holl. Gulden (wiegt 10 Gramm rauh à 0,945 fein); c) einer engl. Krone von 5 Schilling (wiegt 28Gr.,276. rauh à 0,925 f.); d) einer Hamburger Courantmark (wiegt 8Gr.,889 à 0,750 f.); e) eines römischen Scudo (wiegt 26Gr.,898 r. à 0,900 f.) f) einer Hamburger Bancomark (Rechnungsmünze, 27¾ Bancom. = 1 feine Mark Silber)?

30. Welches ist der Werth al pari der französ. 20- und 50-Centimesstücke, welche in neuester Zeit à 0,835 fein geprägt werden?

31. Wieviel Gramm wiegt ein neues 5-Groschenstück; es enthält den sechsten Theil des in einem Thlr. enthaltenen Silbers und ist 0,520 fein.

32. Nach dem Münzvertrage von 1857 sollen 100 Thlr. (oder Gulden) in Billonmünze nur so viel Silber enthalten, als 85 Thlr. (oder Gulden) in der Hauptmünze; diese Billonmünzen sind 0,350 fein. Wieviel wiegt demnach (rauh) ein neuer preuß. Silbergroschen, ein preuß. $2\frac{1}{2}$ Sgr.stück, ein süddeutsches 6 Kreuzerstück, ein österr. 10-Neukreuzerstück, und um wieviel % steht der Silberwerth dieser Münzen unter ihrem Nominalwerth?

33. Man hat 1000 Thlr. zu entrichten; a) wieviel Ducaten und Courantmünze (Münze der gesetzlichen Währung), b) wieviel Louis-d'or und Courantmünze, c) wieviel preuß. Friedrichsd'or und Courantmünze muß man bezahlen, wenn die Ducaten à 3 Thlr. fest mit einem Agio von $5\frac{1}{2}$ %, die Louis'dor à 5 Thlr. fest mit einem Agio von $10\frac{3}{4}$ (oder auch zu $110\frac{3}{4}$), die Friedrichsd'or zu $13\frac{3}{8}$ (oder auch zu $113\frac{1}{8}$) notirt werden?

34. Wenn man 100 Thlr. Courant bezahlen kann mit 17 Friedrichsd'or und $3\frac{2}{3}$ Thlr., oder mit 18 Louisd'or 3 Sgr.; wieviel % beträgt das Agio auf den Fr. d'or und den Louisd'or?

35. 100 Thlr. in Gold will sagen 20 Louisd'or. Wieviel macht das in Silber, wenn die Louisd'or mit einem Agio von $10\frac{1}{2}$ % (oder zu $110\frac{1}{2}$) notirt werden?

36. Welcher Louisd'or-Curs entspricht in Leipzig dem Preise der Goldkrone von 9 Thlr. 5 Sgr.? (Vgl. Aufg. 27.)

37. In Cöln wurden im Febr. 1865 fremde Banknoten bezahlt zu $99\frac{2}{3}$ (d. h. $99\frac{2}{3}$ % des Nominalwerthes); wieviel hat man also erhalten für Banknoten im Betrage von 300 Thlr.?

38. Wieviel Gulden südd. Währung muß man in Leipzig bezahlen für 200 Thlr., wenn die südd. Währung notirt ist zu $99\frac{2}{3}$ (d. h. $99\frac{2}{3}$ % des Werthes, den die Gulden haben, wenn man rechnet 4 Thlr. = 7 Gulden.)?

39. Wenn das Gold per Zollpfund fein à 461 Thlr., das Silber per Zollpf. fein à 29 Thlr. 29 Sgr. (Cöln, Febr. 1865) verkauft wird, welches ist das Verhältniß zwischen dem Werthe des Goldes und Silbers?

40. Welches Werthverhältniß zwischen Gold und Silber liegt der Verfügung der preuß. Regierung zu Grunde, nach welcher 1 Friedrichsd'or $5\frac{2}{3}$ Thlr. gelten soll?

41. Welches Werthverhältniß findet statt, wenn deutsche Goldkronen gelten $8\frac{2}{5}$ Thlr. fest mit $10\frac{1}{4}$ % Agio? (Aufgabe 27.)

42. Wieviel ist in Silber ein 20-Frankenstück werth, wenn man annimmt, das Verhältniß zwischen Gold und Silber sei 15,40.?

Die Proportionen.

240. Die Zahl, welche ausdrückt, wievielmal B in A enthalten ist, oder wievielmal A so groß ist, als B, oder der Quotient A : B heißt das (geometrische) **Verhältniß von A zu B**; zwei gleiche Verhältnisse bilden eine (geometrische) **Proportion**. Solche sind z. B.

1 Thlr. : 1 Franken = 15 : 4
1 Franken : 1 Thlr. = 8 : 30
1 Franken : 1 Thlr. = 100 : 375
8 : 30 = 100 : 375
30 : 8 = 375 : 100
$\frac{3}{2} : \frac{2}{5} = 125 : \frac{100}{3}$

Statt des Zeichens „=" **schreibt** man häufig „: :", also 1 Thlr. : 1 Franken : : 15 : 4 und man liest „1 Thaler verhält sich zu 1 Franken, wie 15 zu 4." Die Dividende der beiden gleichen Quotienten (1 Thlr. und 15) heißen **Vorderglieder** und die Divisoren (1 Fr. und 4) heißen **Hinterglieder** der beiden Verhältnisse. Das erste und vierte Glied heißen **die äußern**, das zweite und dritte **die mittleren Glieder.**

Anmerkung. Die Differenz zweier Zahlen heißt ihr arithmetisches Verhältniß, und die Gleichung zwischen zwei arithme-

tischen Verhältnissen heißt eine **arithmetische Proportion.** Eine solche ist z. B. 30—8=375—353, welche man auch anschreibt „30 . 8 : 375 . 353"; unter einem Verhältnisse oder einer Proportion ohne weitere Bestimmung versteht man aber immer eine geometrische Proportion.

241. Man kann also leicht einen der vier Sätze finden, wenn man die drei andern kennt.

Aufgabe 1. Welches ist das dritte Glied der Proportion $5 : \frac{3}{4} = x : \frac{6}{5}$?

Auflösung. $5 : \frac{3}{4} = \frac{20}{3}$; also ist auch $x : \frac{6}{5} = \frac{20}{3}$ und $x = \frac{20}{3} \times \frac{6}{5} = 8$ (Nr. 42).

242. Aufgabe 2. Welches ist der Hintersatz x des zweiten Verhältnisses der Proportion $5 : \frac{3}{4} = 8 : x$.

Auflösung. $5 : \frac{3}{4} = \frac{20}{3}$; also ist auch $8 : x = \frac{20}{3}$ und (Nr. 32) $x = 8 : \frac{20}{3} = \frac{6}{5}$.

243. In folgender Proportion $5 : \frac{3}{4} = 8 : \frac{6}{5}$ ist der gleiche Quotient beider angezeigten Divisionen $\frac{20}{3}$; mithin ist $5 = \frac{3}{4} \times \frac{20}{3}$ und $8 = \frac{6}{5} \times \frac{20}{3}$, und obige Proportion kann man schreiben $\frac{3}{4} \times \frac{20}{3} : \frac{3}{4} = \frac{6}{5} \times \frac{20}{3} : \frac{6}{5}$.

Das Product der äußern Glieder $(\frac{3}{4} \times \frac{20}{3} \times \frac{6}{5})$ ist also dem Producte der innern Glieder $(\frac{3}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{20}{3})$ gleich; oder allgemeiner:

Gesetzt, es bestehe folgende Proportion

$$A : B = M : N$$

und der gleiche Quotient beider Divisionen sei q, so ist $A = B \times q$ und $M = N \times q$, und obige Proportion kann man schreiben $B \times q : B = N \times q : N$, woraus sich der **Hauptlehrsatz** ergibt, daß das Product der äußern Glieder $(B \times q \times N)$ dem Producte der innern Glieder $(B \times N \times q)$ gleich ist.

244. Gesetzt zwei Producte von je zwei Factoren seien einander gleich oder $A \times N = M \times B$. Ist nun

der eine Factor eines dieser Producte, z. B. A 5 (oder q) mal so groß, als ein Factor des andern Productes, z. B. B, so muß der andere Factor letzteren Productes —N— auch 5 (oder q) mal so groß sein als der andere Factor ersteren Productes — M —, denn wenn M größer oder kleiner wäre, als 5×N, so könnte A×M oder B×5×N nicht gleich sein B×M. Folglich ist A : B = M : N. Daraus ergibt sich der **entgegengesetzte Lehrsatz:** Sind zwei Producte von je zwei Factoren einander gleich, so bildet man eine richtige Proportion, indem man einen Factor des einen Productes als erstes Glied, einen Factor des andern Productes als zweites Glied, den andern Factor letzteren Productes als drittes und den andern ersteren Productes als viertes Glied ansetzt, oder einfacher indem man die beiden Factoren des einen als äußern und die beiden Factoren des andern Productes als mittlere Glieder anschreibt.

245. Die Proportion A : B = M : N gibt also die Gleichung A × N = B × M und diese hinwiederum gibt folgende acht Proportionen:

1) A : B = M : N. Vergleicht man die folgenden mit dieser, so sieht man,
2) A : M = B : N. daß man die mittlern Glieder vertauschen kann,
3) N : B = M : A. daß man die äußern Glieder vertauschen kann,
4) N : M = B : A. daß man zugleich die mittlern und äußern Glieder vertauschen kann,
5) M : N = A : B. daß man die beiden Verhältnisse versetzen kann (was sich von selbst versteht),

6) B : N = A : M.
7) M : A = N : B.
8) B : A = N : M. daß man Vorder- und Hinterglieder mit einander vertauschen kann.

246. Ferner, wenn A : B = M : N, d. h. wenn A × N = B × M, so bleibt diese Gleichung bestehen und folglich auch die erste Proportion:

1) wenn man A und B durch dieselbe Zahl multiplizirt oder dividirt — man kann also Vorder- und Hinterglied eines Verhältnisses durch dieselbe Zahl multipliziren oder dividiren (32);

2) wenn man A und M durch dieselbe Zahl multiplizirt oder dividirt — man kann also die beiden Vorderglieder durch dieselbe Zahl multipliziren oder dividiren;

3) wenn man B und N durch dieselbe Zahl multiplizirt oder dividirt — man kann also die beiden Hinterglieder durch dieselbe Zahl multipliziren oder dividiren.

247. Addirt man die Hinterglieder zu den Vordergliedern oder subtrahirt man sie von denselben, so werden die Quotienten beider Divisionen um eine Einheit größer oder kleiner; sie bleiben also einander gleich und die Proportion bleibt richtig. Beispiel. 20 : 5 = 16 : 4 (= 4)
25 : 5 = 20 : 4 (= 5)
15 : 5 = 12 : 4 (= 3).

248. Aus der Proportion . . . . . A : B = M : N
bildet man nach 245,2 die Proportion . . A : M = B : N
aus dieser nach obiger Regel die Proportionen . . . . . .
A + M : M = B + N : N
A − M : M = B − N : N

und nach 245.2. . . . . . $\left\{ \begin{array}{l} A+M : B+N = M : N \\ A-M : B-N = M : N \end{array} \right.$

d. h. die Summe oder Differenz der Vorderglieder einer Proportion verhält sich zur Summe oder Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied. Diesen Lehrsatz kann man auf eine beliebige Anzahl gleicher Verhältnisse ausdehnen. Gesetzt z. B. $A : B = M : N = O : P = Q : R$

$A : B = M : N$, also

$A+M : B+N = M : N$, od. da $M : N = O : P$,

$A+M : B+N = O : P$; also nach obig. Lehrs.

$A+M-O : B+N-O = O : P$, od., da $O : P = Q : R$

$A+M-O : B+N-O = Q : R$, also

$A+M-O+Q : B+N-O+R = Q : R$. Addirt oder subtrahirt man also alle Vorderglieder einer Reihe von gleichen Verhältnissen und addirt oder subtrahirt man die entsprechenden Hinterglieder, so verhalten sich diese Resultate zu einander wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

249. Hat man folgende Proportionen $A : B = M : N$

$C : D = O : P$

$E : F = Q : R$

so ist auch . . . . $A \times N = B \times M$

$C \times P = D \times O$

$E \times R = F \times Q$

u. mith. $A \times N \times C \times P \times E \times R = B \times M \times D \times O \times F \times Q$

oder $(A \times C \times E) \times (N \times P \times R) = (M \times O \times Q) \times (B \times D \times F)$

und $A \times C \times E : B \times D \times F = M \times O \times Q : N \times P \times R$.

Aus mehreren Proportionen kann man also eine neue richtige Proportion bilden, indem man alle erste, alle zweite, alle dritte und alle vierte Glieder mit einander multiplizirt.

Anmerkung. Sind in einer arithmetischen Proportion die beiden Mittelglieder gleich, so heißt ein solches Mittelglied das arithmetische Mittel der äußern Glieder (vergl. 209); sind in einer geometrischen Proportion die beiden Mittelglieder gleich, so heißt ein solches Mittelglied das geometrische Mittel der äußern Glieder. Da 24 . 15 : 15 . 6, so ist 15 das arithmetische, und da 24 : 12 = 12 : 6, so ist 12 das geometrische Mittel von 24 und 6.

250. Nach dem Lehrsatz von Nr. 243 findet man auf sehr einfache Weise das unbekannte Glied einer Proportion, deren drei andere Glieder bekannt sind. Ist eines der mittleren Glieder unbekannt, wie in der Proportion $5 : \frac{3}{4} = x : \frac{6}{5}$, so hat man $\frac{30}{5} = \frac{3}{4} \times x$ und $x = \frac{30}{5} : \frac{3}{4} = 8$, und man findet x, indem man das Product der äußern Glieder durch das bekannte mittlere Glied dividirt. Ist eines der äußern Glieder unbekannt, wie in der Proportion $5 : \frac{3}{4} = 8 : x$, so hat man $5 \times x = 8 \times \frac{3}{4} = 6$ und $x = \frac{6}{5}$, und man findet x, indem man das Product der mittleren Glieder durch das bekannte äußere Glied dividirt.

251. Anwendung der Proportionen. Aufgabe von Nr. 157. Hier haben wir es mit vier Größen zu thun: mit 14M.,25, mit deren Preis 15Fr.,80, mit 11M.,4 und mit deren Preis, den wir x nennen wollen. Je mehr Meter man kauft, desto mehr Franken muß man bezahlen, oder die zweite Länge ist so oft in der ersten Länge enthalten, als der zweite Preis im ersten Preise enthalten ist; folglich haben wir die Proportion:

$$14{,}25 : 11{,}4 = 15{,}80 : x \text{ und}$$
$$x = 11{,}4 \times 15{,}80 : 14{,}25 = 12{,}64.$$

Man pflegt in diesem Falle zu sagen, die Preise seien zu den Waaren proportional oder direct proportional.

252. Aufgabe von Nr. 158. Hier haben wir es ebenfalls mit vier Größen zu thun: mit $14^1/_4$ Meter Tuch, mit $15^4/_5$ Franken, dem Preise eines Meters von diesem Tuche, mit $11^2/_5$ Meter Tuch, und x, dem Preise eines Meters von letzterm Tuche. Will man für dasselbe Geld 2, 3, 4 mal mehr Tuch erhalten, so muß man Tuch kaufen, wovon der Meter 2, 3, 4 mal weniger kostet; so viel mal also das zweite Quantum von Tuch so groß ist, als das erste, so viel mal wird der erste Preis per Meter, so groß sein, als der zweite; folglich haben wir die Proportion $11^2/_5 : 14^1/_4 = 15^4/_5 : x$ und $x = 14^1/_4 \times 15^4/_5 : 11^2/_5 = 19^3/_4$ Fr. (Vergl. 158, Aufg. 5.) Man pflegt in diesem Falle zu sagen, die Preise eines Meters seien indirect oder umgekehrt proportional zu dem Quantum, welches man für eine bestimmte Summe kaufen kann.

Anmerkung. 15 : 10 heißt ein fallendes Verhältniß, weil 10 kleiner ist, als 15; 10 : 15 heißt ein steigendes Verhältniß. Offenbar sind die Verhältnisse, welche eine Proportion bilden, entweder beide steigende oder beide sind fallende Verhältnisse. Man kann darum fast gedankenlos eine Proportion anschreiben. Hat man erkannt, daß die unbekannte und die gleichartige bekannte Zahl direct oder indirect proportional sind, so bildet man aus den beiden ersten ein Verhältniß, prüft dann, ob es ein steigendes oder fallendes ist, und bildet dann aus den beiden andern ein entsprechendes Verhältniß. Da ich (obiges Beispiel) weniger Tuch haben will, kann ich theureres kaufen; folglich ist x größer als $15^4/_5$ und $15^4/_5 : x$ ist ein steigendes Verhältniß; ich setze also auch die beiden andern Zahlen in ein steigendes Verhältniß und schreibe $15^4/_5 : x = 11^2/_5 : 14^1/_4$.

253. Aufgabe von Nr. 162.

Auflösung. Wir lassen, wie in Nr. 162, die Aufgabe in mehrere Regel-de-tri-Aufgaben zerfallen.

1. 20 Arbeiter werfen bei 9stündiger Tagesarbeit (in 12 Tagen einen Graben auf von 40 Met. Länge, 4 Met.

Breite und 6 Met. Tiefe); wieviel Arbeiter werden bei 10stündiger Tagesarbeit in derselben Zeit dasselbe Werk verrichten? Bezeichnen wir diese Zahl durch x, so erhalten wir . . . . $x : 20 = 9 : 10$

2. x Arbeiter werfen (bei 10stündiger Tagesarbeit) in 12 Tagen einen Graben auf (von 40 Met. Länge, 4 Met. Breite und 6 Met. Tiefe); wieviel Arbeiter werden bei derselben täglichen Arbeitszeit in 18 Tagen dasselbe Werk verrichten? Bezeichnen wir diese Zahl durch y, so erhalten wir . . . . $y : x = 12 : 18$

3. y Arbeiter werfen (bei 10stünd. Tagesarbeit in 18 Tagen) einen Graben auf von 40 Met. Länge (4 Met. Breite und 6 Met. Tiefe); wieviel Arbeiter werden in derselben Zeit einen Graben aufwerfen von 100 Met. Länge und derselben Tiefe und Breite? Bezeichnen wir diese Zahl durch z, so erhalten wir . . . . . $z : y = 100 : 40$

4. z Arbeiter werfen (bei 10stünd. Tagesarb. in 18 T.) einen Graben auf von (40 Met. Länge) 4 Met. Breite (und 6 Met. Tiefe); wieviel Arbeiter werden in derselben Zeit einen Graben von derselben Länge und Tiefe und 3 Met. Breite aufwerfen? Bezeichnen wir diese Zahl durch v, so erhalten wir . . . . $v : z = 3 : 4$

5. v Arbeit. werfen (bei 10stünd. Tagesarb. in 18 T.) einen Graben auf von (100 Met. Länge, 3 Met. Breite und) 6 Met. Tiefe; wieviel Arbeiter werden in derselben Zeit einen Graben von derselben Länge und Breite und 4 Met. Tiefe aufwerfen? Bezeichnen wir diese Zahl, durch welche die Aufgabe gelöst wird, durch X, so erhalten wir . . . . $X : v = 4 : 6$

Multipliziren wir nun die Glieder obiger fünf Proportionen miteinander, so erhalten wir (249)
$x \times y \times z \times v \times X : 20 \times x \times y \times z \times v =$

$9 \times 12 \times 100 \times 3 \times 4 : 10 \times 18 \times 40 \times 4 \times 6$, oder $X : 20 = 9 \times 12 \times 100 \times 3 \times 4 : 10 \times 18 \times 40 \times 4 \times 6$, und $X = 15$.

254. Aufgabe von Nr. 169.

Aufl. $100 : 3^1/_3 = x : 50$; $x = 1500$.

255. Aufgabe von Nr. 170.

Aufl. $100 : 96^3/_4 = x$: 77 Thlr. 12 Sgr.; x = 80 Thlr.

256. Aufgabe von Nr. 185 und 187.

Aufl. Bezeichnen wir das zu suchende Capital durch x und die zu suchenden Zinsen durch y, so erhalten wir $x : y = 100 : 5 \times 4^1/_4$ oder $x : y = 100 : {}^{85}/_4$; folglich (248) $x + y : y = 100 + {}^{85}/_4 : {}^{85}/_4$, oder (da $x + y = 1212{,}50$) $1212{,}50 : y = {}^{485}/_4 : {}^{85}/_4$, und $y = 212{,}50$; $x = 1000$.

257. Aufgabe von Nr. 206.

Aufl. Bezeichnet man mit x die Zahl von Scudi, mit X die Zahl von Franken, welche der zu suchende Verdienst beträgt, so findet man $x : 3 = 25 : 2$

$X : x = 536 : 100$; folglich

$X : 3 = 25 \times 536 : 2 \times 100$ und $X = 201$.

258. Die Repartitionsrechnung läßt sich nach der Proportionslehre definiren, als eine Rechnung, durch welche man eine Zahl in verschiedene Theile theilt, die zu einander in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Aufgabe von Nr. 225.

Auflösung. Bezeichnen wir durch x den Theil des A, durch y den Theil des B, durch z den Theil des C, so erhalten wir $x : 1200 = y : 800 = z : 500$; folglich (248) $x + y + z : 1200 + 800 + 500 = x : 1200 = y : 800 = z : 500$; oder da $x + y + z = 450$ Thlr.

$450 : 2500 = x : 1200$; $x = 216$

$450 : 2500 = y : 800$; $y = 144$

$450 : 2500 = z : 500$; $z = 90$.

259. Aufgabe von Nr. 226.

Auflösung. Betrachten wir die Gewinne als Zinsen, die beim selben Zinsfuße sich zu einander verhalten wie die Producte der durch die Zeit multiplizirten Capitalien, so erhalten wir

$x : 1000 \times 24 = y : 1500 \times 18 = z : 2000 \times 15$, oder (246)

$x : 10 \times 24 = y : 15 \times 18 = z : 20 \times 15$

$x : 8 = y : 9 = z : 10$; $x + y + z$ oder $1080 : 27 = x : 8 = y : 9 = z : 10$; $40 : 1 = x : 8 = y : 9 = z : 10$;

$x = 320$; $y = 360$; $z = 400$.

260. Aufgabe von Nr. 228.

Auflösung. Wir wollen mit x die Liter à 91 Ct. und mit y die Liter à 65 Ct. bezeichnen, die zur Mischung zu nehmen sind. Auf einem Liter der ersten Sorte verliert er beim durchschnittlichen Preise 8 Ct.; auf den x Litern verliert er also $8 \times x$ Ct. Auf den y Litern wird er $18 \times y$ gewinnen. Soll er nun im Ganzen weder verlieren noch gewinnen, so muß $8 \times x = 18 \times y$ oder $x : y = 18 : 8$ und

$x + y : y = 26 : 8$, und da $x + y = 15^{1}/_{6}$

$15^{1}/_{6} : y = 26 : 8$; $y = 4^{2}/_{3}$; $x = 10^{1}/_{2}$.

Aufgaben.

1. (241 . 242) Berechne x nach folgenden Proportionen.

$3 : 9 = 4 : 6$; $15 : 45 = 6 : x$; $15 : 6 = 45 : x$

$^{1}/_{5} : x = 1^{1}/_{4} : 6^{1}/_{4}$; $x : 1 = 1{,}25 : 6{,}25$; $1{,}25 : x = 6{,}25 : 1$.

2. Man beweise aus der Theorie der Brüche ($3 : 4 = {}^{3}/_{4}$) die Richtigkeit des Lehrsatzes von Nr. 243 (wenigstens für Prop., deren Glieder ganze Zahlen sind).

3. Ebenso beweise man den Lehrsatz von Nr. 244.

4. Man versuche es, die Richtigkeit einer jeden der sieben Veränderungen der ersten Proportion (245) direct zu beweisen.

5. Man beweise, daß man aus der Prop. **A** : **B**=**M** : **N** auch folgende Proportionen bilden kann:

A+2×**B** : **B**=**M**+2×**N** : **N**; **A**+5×**B** : **B**=**M**+5×**N** : **N**
A : **A**+**B**=**M** : **M**+**N**; **A** : **A**—**B**=**M** : **M**—**N**
A+**B** : **A**—**B**=**M**+**N** : **M**—**N**.

6. Sind die Hinterglieder zweier Proport. gleich (**A** : **B**=**M** : **N** und **C** : **B**=**O** : **N**), so bilden die Vorderglieder eine directe Proportion (**A** : **C**=**M** : **O**). Zu beweisen.

7. Dasselbe gilt von den Hintergliedern. Zu beweisen.

8. Sind die mittlern Glieder zweier Prop. gleich (**A** : **B**=**M** : **N** und **C** : **B**=**M** : **O**), so bilden die äußern Glieder eine indirecte Prop. (**A** : **C**=**O** : **N**). Zu beweisen.

9. Man beweise a) daß bei einer arithmetischen Proportion die Summe der äußern Glieder der Summe der innern gleich ist; b) daß man aus zwei gleichen Summen von je zwei Zahlen eine arithmetische Proportion bilden kann; c) daß man dieselbe Zahl addiren kann zum ersten und zweiten Glied, oder zum dritten und vierten, oder zum ersten und dritten, oder zum zweiten und vierten; d) daß man aus mehrern arithmet. Prop. eine andere richtige arithmet. Prop. bildet, wenn man die ersten, zweiten, dritten und vierten Glieder resp. addirt.

10. In Baiern verhält sich die Zahl der Katholiken zu der der Protestanten wie 5 : 2; in Baden wie 43 : 20; in Würtemberg wie 5 : 11. Die Zahl der Juden mag ungefähr $^5/_4$ Procent der Bevölkerung betragen. Wieviel gibt es demnach ungefähr Katholiken, Protestanten und Juden in jedem dieser drei Staaten? (S. Seite 48.)

Zu weiterer Einübung löse man mit Hülfe der Proportionen Aufgaben über die einfache und zusammengesetzte Regel-de-tri, Procentrechnung 2c.

Verschiedene Aufgaben.

1. Man nimmt an, daß in 3 Jahren (zu 365 Tagen) auf der Erde ungefähr 1000,000,000 Menschen sterben; wieviel macht das im Durchschnitt auf einen Tag, auf eine Stunde und auf eine Minute?

2. Was kosten in Petersburg 27 Pud 28 ℔ 42 Sol. Silber, wenn 1 Pud 985 Silberrubel $62^1/_2$ Kopeken kostet? (1 Rub. S. = 100 Kopeken. 1 Pud = 40 ℔ à 96 Solotnik à 96 Doli).

3. Wieviel Meter macht 1 bayerische und 3 Wiener-Ellen (Siehe Aufg. 10, S. 227). Wie kann man die Rechnung abkürzen, wenn man nur 2 Dezimalstellen haben will?

Anmerkung. In diesem Falle wird die letzte Ziffer um eine Einheit vermehrt, wenn die folgende mehr als 5 betragen hätte; warum?

4. Um wieviel ist die bayerische Elle größer, als die Wiener und als die preußische Elle? (S. Aufg. 10, S. 227). Wie wird man die Rechnung abkürzen, wenn man nur 2 Dezimalstellen braucht?

5. Wieviel Meter machen $25\frac{1}{2}$ Yards? (S. Anm. 3, S. 223) Wie wird man die Rechnung abkürzen, wenn man an 3 Dezimalstellen genug hat?

6. Wieviel Meter machen $25\frac{1}{2}$ Yards? Wie wird man die Rechnung abkürzen können, wenn man an 2 Dezimalstellen genug hat?

7. Wieviel Yards machen 10—100—3000 Meter? Wie kann man diese Rechnungen abkürzen, wenn man nur 3 Dezimalstellen braucht?

8. Wieviel Hamburger Ellen machen 250 Frankfurter Ellen? (S. Aufg. 10, S. 227) Wie kann man die Rechnung abkürzen, wenn man das Resultat nicht genauer, als in Zehnteln der Hamburger Elle ausrechnen will?

9. Man berechne mit ähnlichen Abkürzungen, indem man sich mit Dezimalen der ersten Stelle begnügt, die drei Aufgaben 10, S. 227.

10. Wieviel Meter wird Achilles gehen müssen, um eine Schildkröte einzuholen, die 100 mal so langsam geht, als er und die 32 Meter voraus hat? Während er 32 Meter macht, schreitet sie 0,32m. voran; während er diese Strecke zurücklegt, macht sie 0,0032 Met., u. s. w. Also muß er machen 32+0,32+0,0032+0,000032 +0,00000032 Meter u. s. w.; wieviel macht das?

11. Was kosten 16 Tons 13 Cwt. 2 Qrs., wenn $1\frac{1}{2}$ ℔ 3 Schilling kostet? (1 engl. Ton = 13 Centner (Cwt); 1 Cwt = 4 Quarters (Viertel); 1 Qr. = 28 ℔.—Schill. siehe S. 58).

12. Eine Dampfmaschine von 24 Pferdekraft braucht zu einer gewissen Arbeit 10 Tage; wieviel braucht eine andere von 16 Pferdekraft?

13. Wenn die Heizkraft des Fichtenholzes = 0,78, die des Bir-

kenholzes = 0,80; wieviel Stères von ersterm sind 50 Stères von letzterem werth?

14. Nach dem Mariotte'schen Gesetze muß das Wasser 4 Fuß,5 fallen, um in freier Luft 3F.,375 zu steigen; a) wieviel Fall muß das Wasser haben zu einem Springbrunnen von 36F.,4? b) wie hoch wird ein Springbrunnen steigen, wenn das Wasser $6\frac{1}{2}$ F. fällt?

15. a) Eine Uhr geht jeden Tag $2\frac{2}{3}$ Minuten nach. Sie wird an einem Sonntag um Mittag richtig gestellt u. zeigt am Donnerstag Abend 7 Uhr 50 Minuten; wieviel Uhr ist es? b) Wieviel Uhr wird sie am Freitag um Mittag zeigen? c) Wann wird sie gerade wieder richtig zeigen (d. h. genau 12 Stunden nachgehen)?

16. Eine Arbeit kann von 10 Arbeitern in 36 Tagen gemacht werden; 4 Tage nachdem sie angefangen, kamen noch 5 Arbeiter hinzu, und 6 Tage später wieder 8 andere. Wann wird die Arbeit fertig?

17. Ein Kaufmann gewinnt per Jahr 30 % auf dem Kapital das er in seinem Handel verwerthet. Am Ende jedes Jahres nimmt er von diesem Kapitale 1000 Franken weg für seine Haushaltung. Nach drei Jahren hat sich sein für den Handel verfügbares Kapital verdoppelt. Wieviel hatte er im Anfang?

18. Aus einem Faß, das eine Ohm (160 Liter) Saarwein enthält, nimmt man 8 Liter heraus, und füllt es mit Moselwein wieder. Wieviel Saar- und wieviel Moselwein wird es enthalten, nachdem man dasselbe zum 6. Male wiederholt hat.

19. Wieviel Zinsen würden 1000 Fr. zu 6 % in einem Jahre ertragen, wenn die monatlichen Zinsen für jeden folgenden Monat zum Capitale geschlagen würden?

20. Zu wieviel % leiht eigentlich Jemand Geld aus, der die Zinsen à 6 % alle zwei Monate zum Capitale schlägt?

21. Hiero von Syracus hatte einem Goldarbeiter 10 ℔ Gold gegeben, um daraus eine Krone zu machen. Die Krone, welche dieser verfertigte, wog 10 ℔, aber Hiero zweifelte, ob der Arbeiter nicht Silber beigemischt habe und zog Archimedes zu Rath. Dieser, welcher wußte, daß das Gold im Wasser $\frac{52}{1000}$, das Silber $\frac{99}{1000}$ seines Gewichtes verliert, wog die Krone im Wasser und fand ein Gewicht von 9 ℔ und 6 Unzen (Unze = $\frac{1}{16}$ ℔); wieviel Gold und Silber enthielt demnach die Krone?

22. Spiritus à 90 % (oder von 90 Grad) ist eine Mischung, von der ein Liter oder Quart $^{90}/_{100}$ Liter oder Quart Spiritus und $^{10}/_{100}$ Wasser enthält. Man gießt zusammen 50 Quart Spiritus à 90 %, 45 Quart à 80 % und 13 Quart Wasser; welchen Gehalt hat die Mischung?

23. Ein Faß von 450 Quart ist mit Branntwein à 52 % gefüllt; wieviel ist davon herauszunehmen und durch Wasser zu ersetzen, wenn ein Gehalt von 46 % erzeugt werden soll? (Von der Veränderung des Volumens durch die Mischung wird abgesehen.)

24. Wieviel sind 600 Quart Spiritus à 72 % werth, wenn 100 Quart à 80 % zu $13^1/_3$ Thlr. verkauft werden?

25. Welches Capital wächst mit den Zinseszinsen zu $3^1/_2$ % in 6 Jahren an zu 12292Fr.,55?

26. In wieviel Jahren verdoppelt sich ein Capital mit den Zinseszinsen zu 5 %?

27. In wieviel Jahren wird ein solches Capital 4 mal, 8 mal, 16 mal so stark?

28. Wieviel mal hätte sich ein bei Chr. Geburt zu 5 % Zinseszinsen ausgeliehener Centim demnach verdoppelt, und welchen Werth hätte er erlangt i. J. 1865? Man berechne dieses annäherungsweise und suche dann, welchem Gewicht und welcher Masse von Gold dieser Werth entspricht. (Vergl. Aufgabe 5, Seite 255 und Aufgabe 53, Seite 96.)

29. 25 Personen bezahlen 33 Franken für ein Mittagessen; die Erwachsenen bezahlen jeder $1^4/_5$ Fr.; jedes Kind 1Fr.,05. Wieviel Kinder und Erwachsene waren unter den 25 Personen?

30. Jemand hat 25000 Fr. ausgeliehen, theils zu 4, theils zu 5 %. Sie bringen ihm 1000 Fr. Zinsen. Wieviel hat er zu 5 und wieviel zu 4 % ausgeliehen?

31. Ein Wirth will Wein von 70 Centimes und von 1Fr.,20 so zusammen mischen, daß er 200 Liter erhalte, welche er mit einem Gewinn von 40 % zu 1Fr.,35 verkaufen kann. Wieviel muß er von jeder Sorte nehmen?

32. Jemand vermacht 5 Neffen die Summe von 20000 Franken, welche so vertheilt werden sollen, daß jeder im Verhältniß seines Alters weniger bekomme. **A** ist 25, **B** 20, **C** 15, **D** 12 und **E** 10 Jahre alt. Wieviel bekommt Jeder?

33. Drei Arbeiter machen eine Arbeit in 30 Tagen. Der erste macht $^3/_4$ von der Arbeit des zweiten; der zweite $^2/_3$ von der des dritten. In wieviel Zeit würde Jeder allein die Arbeit vollenden?

34. Karl's Vater sagt: Ich bin 4 mal so alt, als mein Sohn. Vor 5 Jahren, war ich 7 mal so alt, als er. Wie alt ist Karl?

35. Ein Bruch ist = $^1/_5$. Addirt man 12 zu Zähler und Nenner, so wird er = $^1/_2$. Welches ist der erste Bruch?

36. Anna ist 5 mal so alt als Marie; vor einem Jahre war sie 7 mal so alt; nach wieviel Jahren wird sie gerade doppelt so alt sein?

37. Ein kleiner Handel ergab 84 Franken (Einsatz und Gewinn). **A** hatte 50 Fr. eingesetzt und 10 Fr. gewonnen. Wieviel hatte **B** eingesetzt?

38. **A** und **B** haben zusammen 60 Fr.; **B** und **C** haben zusammen 75 Fr. und **A** und **C** zusammen 65 Fr.; wieviel hat jeder?

39. Wenn man zu einer Zahl 5 hinzufügt, oder sie mit $3^1/_4$ multiplizirt, so erhält man dasselbe Resultat. Welches ist diese Zahl?

40. Wenn man zu einer Zahl 5 hinzufügt, oder sie mit $^2/_3$ dividirt, so erhält man dasselbe Resultat. Welches ist diese Zahl?

41. Wenn man von einer Zahl 5 wegnimmt, oder sie mit $^4/_5$ dividirt, so erhält man dasselbe Resultat. Welches ist diese Zahl?

42. Ernst hat zu seinen Aepfeln noch 10 erhalten, darauf $^2/_7$ von allen weggegeben. Nun hat er noch gerade so viel als zuvor; wieviel hat er?

43. **A** und die Hälfte von **B** macht 1; **B** und das Drittel von **A** macht ebenfalls 1. Wieviel beträgt **A** und **B**?

44. 15 Flaschen Rheinwein und 10 Flaschen Saarwein kosten 48 Franken; 10 Flaschen Rheinwein und 15 Flaschen Saarwein kosten 44Fr.,50. Was kostet die Flasche jeder Sorte?

45. Gibt **A** dem **B** einen Apfel, so haben beide gleichviel; gibt **B** dem **A** einen Apfel, so hat **A** deren zweimal so viel als **B**. Wie viel hat Jeder?

46. **A** und **B** haben zusammen 30 Nüsse. Hätte **A** 20 mehr und **B** 10 mehr, so hätte **A** deren 3 mal so viel, als **B**. Wieviel hat Jeder?

47. Hätte ich noch 21 Fr., sagt Fritz zu Paul, so hätte ich 3 mal

so viel als du. Hätte ich noch 21 Fr., erwiedert Paul, so hätte ich 5 mal so viel als du. Wieviel hat Jeder?

48. Addirt man 1 zum Zähler eines Bruches, so wird er $\frac{1}{3}$; fügt man aber 1 zum Nenner, so wird er $\frac{1}{4}$. Welches ist dieser Bruch?

49. Bei einem Spaziergang mit seiner Schule vertheilt ein Lehrer 846 Nüsse unter die drei Klassen seiner Schüler. Jeder Schüler der Klasse, die am fleißigsten war, soll 24 Stück erhalten und die übrigen unter die zwei andern Klassen gleich vertheilt werden. Ist die erste Klasse die fleißigste, so erhält jeder andere Schüler 12 Nüsse; ist es die zweite, so erhält jeder andere 9, und ist es die dritte, so erhält jeder andere 4 Stück. Wieviel Schüler sind in jeder Klasse?

50. Zwei Personen reisen zu gleicher Zeit von Trier und Luxemburg ab und begegnen sich 6 Stunden von Trier und 4 Stunden von Luxemburg. Wäre der Trierer eine Stunde später abgereist, so wären sie genau in der Mitte des Weges zusammengetroffen. Wieviel Zeit braucht jeder, um den ganzen Weg zurückzulegen?

51. Drei Spieler kommen überein, daß jeder Verlierende den beiden andern ihr Geld verdoppele. Nach drei Parthien, von denen jeder eine verloren hat, hat jeder 160 Sgr.; wieviel hatte jeder Anfangs?

52. A und B haben zusammen 21 Franken mehr als C; A und C haben zusammen 25 Franken mehr als B; B und C haben zusammen 39 Franken mehr als A. Wieviel hat Jeder?

53. Drei Arbeiter machen eine Arbeit, welche der erste und der zweite in 8, der erste und der dritte in 9, der zweite und der dritte in 10 Tagen machen würden. Wieviel Zeit brauchen sie, wenn sie zusammen arbeiten?

54. a) die beiden Zeiger einer Uhr stehen genau auf 12; wann werden sie wieder genau übereinanderstehen? b) wieviel Uhr ist es, wenn der große Zeiger gerade so weit über 5 ist, als der kleine über 6? c) wieviel Uhr ist es, wenn der große Zeiger gerade so weit ist über 6, als der kleine über 5? d) wieviel Uhr ist es, wenn beide Zeiger zwischen 5 und 6 gerade übereinander stehen?

55. Aus zwei Röhren fließt Wasser in einen Behälter; die zweite wurde aber erst 5 Stunden nach der ersten geöffnet. Wären sie zugleich geöffnet worden, so hätte sich der Behälter 3 Stunden eher

gefüllt, und es hätte dann die zweite so viel Wasser geliefert, als die erste wirklich geliefert hat. In wieviel Stunden würde jede einzelne Röhre den Behälter füllen?

56. Gesetzt im zweiten Falle liefere die zweite $^{6}/_{5}$ von dem Wasser, welches die erste wirklich geliefert hat; in wieviel Zeit rc.?

57. Ein Faß enthält 120 Liter Wein einer bessern und 80 Liter einer schlechtern Sorte; ein anderes enthält 40 Liter der besseren und 160 der schlechtern Sorte. Man wünscht daraus zwei Mischungen zu bereiten; eine, die von jeder Sorte gleichviel, eine andere, die 3 Liter der bessern auf 7 Liter der schlechtern Sorte enthalte. Wie hat man dieses anzustellen?

58. Man hat verschiedene güldige Barren von 1 Mark (=16 Loth). Die von der ersten Sorte enthalten 10 Loth Gold, 2 Loth Silber und 4 Loth Kupfer; die von der zweiten 4 Loth Gold, 6 Loth Silber und 6 Loth Kupfer; die von der dritten Sorte 5 Loth Gold, 8 Loth Silber und 3 Loth Kupfer; wieviel muß man von jeder Sorte nehmen zu einem güldigen Barren von 16 Mark, der auf 5 Loth Gold 7 Loth Silber und 4 Loth Kupfer enthalte?

59. radain M ch teerlei Münzen, 10 Stück der ersten, 4 der zweiten und 5 der dritten Sorte macht 80 Fr.; 2 Stück der ersten, 6 der zweiten und 8 der dritten Sorte macht 112 Fr.; 4 Stück der ersten, 6 der zweiten und 3 der dritten Sorte macht 64 Fr.; welches ist der Werth jedes Stückes?

60. Wie nach den Numerationsgesetzen im Decimalsystem jede Vergleichsgröße 10 mal so groß ist, als die Vergleichsgröße der Stelle zur Rechten, und 10 mal so klein, als die Vergleichsgröße der Stelle zur Linken, so würde im 8= System jede Vergleichsgröße 8 mal so groß sein, als die der Stelle zur Rechten und 8 mal so lein, als die der Stelle zur Linken, und in diesem System wäre $75{,}24 = 7 \times 8 + 5 + {}^{2}/_{8} + {}^{4}/_{64}$.— Wie schreibt man im Decimalsystem die Zahlen, welche im 8=System heißen: 10; 100; 1000; 3511; 0,1; 0,01; 0,0001; 65,65; welche im 2= System (Binarsystem) heißen: 10; 100; 1000; 11100110101; 0,1; 0,01; 0,0001; 110101, 110101; welche im 12= System ($x = 10$; $y = 11$) heißen: 10; 100; 1000; 10y5; 0,1; 0,01; 0,0001; 45,9y3?

61. Wie schriebe man im 8=, im 2=, im 12= System. $40^{3}/_{4}$?

62. Wieviel macht der im 12= System geschriebene periodische Bruch 5,5555 2c.? (Vgl. Aufg. 54, a.)

63. Man berechne nach den Gesetzen des 9= Systems folgende Rechnungen mit Zahlen, welche im 9= System geschrieben sind: 52183+31420; 52185—31420; 45×10; 675×1000; 384×32; 17500 : 100; 1331 : 5; 1331 : 27; 67,25×1000; 1853 : 100; 0,6 : 0,02?

64. Paul bittet Ernst, sich eine Zahl zu denken, die kleiner sei, als 12. Ernst soll sie durch 3 dividiren und den Rest dieser Division mit 4 multipliziren, darauf dem Paul dieses Product nennen. Ferner soll Ernst die Zahl durch 4 dividiren, den Rest dieser Division mit 9 multipliziren und dem Paul auch dieses Product angeben. Paul addirt nun diese beiden Producte, und wenn diese Summe kleiner ist, als 12 so ist sie die zuerst gedachte Zahl; ist diese Summe größer als 12 oder 24, so zieht Paul 12 oder 24 davon ab, und gibt nun den herausgebrachten Rest, als die zuerst gedachte Zahl an. Ist Paul's Verfahren richtig, und warum?

65. Man lasse Jemand sich eine Zahl denken, von 0—29. Diese Zahl lasse man durch 2, 3 und 5 dividiren. Den Rest der ersten Division lasse man durch 15, den der zweiten durch 10, den der dritten durch 6 multipliziren. Man addire die drei auf diese Weise herausgebrachten Producte, ziehe davon so oft 30 ab, als es darin enthalten ist; der Rest wird die erstgedachte Zahl sein. Warum?

66. Jemand denke sich eine Zahl unter 105. Man bittet ihn, dieselbe durch 3, 5 und 7 zu dividiren. Den ersten dieser Reste lasse man dann durch 70, den zweiten durch 21, den dritten durch 15 multipliziren, diese Producte addiren, und sich das Resultat nennen. Dividirt man dasselbe durch 105, so wird der Rest dieser Division die erste Zahl sein; warum?

67. Man bittet Jemanden, sich eine beliebige Zahl zu denken. Dann soll er davon 1 abziehen, den Rest verdoppeln, die erstgedachte Zahl hinzufügen, wiederum 1 abziehen, mit 3 multipliziren und noch einmal die erste Zahl hinzufügen und das herausgebrachte Resultat angeben. Man streiche alsdann die 1 von der Einerstelle weg und füge es zu der Zahl die stehen bleibt; dieses Resultat ist dann die erstgedachte Zahl. Warum?

68. Man bittet Jemanden, sich zwei Zahlen zu denken, wovon die kleinere aber unter zehn sein soll. Er soll die kleinere von der

größern abziehen, den Rest verdoppeln, die größere hinzufügen, die kleinere wiederum abziehen, mit 3 multipliziren, noch einmal die erstere Zahl hinzufügen, und die herausgebrachte Zahl angeben. Die Ziffer, welche auf der Einerstelle steht, ist die kleinere Zahl; man streiche sie weg und addire sie zu der Zahl, die bleibt, so wird man auch die größere finden. Zu beweisen.

69. In einem gewöhnlichen Jahre hat der Monat Januar 31, Febr. 28, März 31, April 30, Mai 31, Juni 30, Juli 31, August 31, September 30, October 31, November 30, December 31 Tage. In einem Schaltjahre hat Febr. 29 Tage. Jede Jahreszahl, welche durch 4 theilbar ist, entspricht einem Schaltjahre, ausgenommen die durch 100 theilbaren Jahreszahlen, von denen nur diejenigen, bei welchen die Zahl der Jahrhunderte durch 4 theilbar ist, Schaltjahre sind. Wieviel Tage sind demnach in 4 Jahrhunderten; welches ist die durchschnittliche Länge des Jahres nach dem gregorianischen Kalender und wie groß ist der Unterschied zwischen dieser durchschn. Länge des Jahres und der wirklichen Länge, welche 365 Tage,242264 beträgt.

70. Im Kalender bezeichnet man die 7 ersten Tage des Jahres durch die Buchstaben **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, für die 7 Tage der zweiten Woche kehren dieselben Buchstaben in derselben Ordnung wieder, und ebenso für die folgenden Tage bis zum Ende des Jahres. Welcher Buchstabe bezeichnet demnach den 2. Febr., den 25. März (in diesem Kalender hat Febr. 28 Tage), den 29. Juni, den 8. December, den 25. December?

71. Man nennt Sonntagsbuchstaben eines Jahres denjenigen welcher in diesem Jahre den ersten Sonntag, und folglich, wenn dieses Jahr ein gemeines Jahr ist, alle Sonntage bezeichnet. Welches ist in einem Schaltjahre der Sonntagsbuchstabe für den März und die folgenden Monate, wenn der Sonntagsbuchstabe für den Januar und Februar **A** oder **E** ist? Der Sonntagsbuchstabe für 1853 war **B**, welches waren demnach die Sonntagsbuchstaben für 1854, 1855 und die beiden Sonntagsbuchstaben für 1856? An was für Wochentage fielen demnach im Jahr 1856 Allerheiligen (1. Nov.) — Mariä Empfängniß (8 Dec.) — Weihnachten (25. Dec.)

72. Unter dem Alter des Mondes oder unter dem Tage der Mondphasen versteht man die Zahl der Tage, welche seit dem letzten Neumonde verflossen sind. Zur Zeit des ersten Viertels ...

er 7, zur Zeit des Vollmondes 14, zur Zeit des letzten Viertels 22 und zur Zeit des Neumondes 29 oder 30 Tage alt. — In 19 Jahren erneuern sich die Mondphasen ziemlich genau 235 (eigentl. 234,997) mal. Nach einer durchschnittlichen Berechnung, welche im Einzelnen nicht immer genau ist, aber der Einrichtung des Kalenders zu Grunde liegt, besteht der Zeitraum der Mondphasen abwechselnd aus 30 und 29 Tagen, so daß man den ersten Neumond des Jahres am 30. Tage der Mondphasen, den zweiten am 29. rc. eintreten läßt. Hat ein Jahr 13 Neumonde, so versetzt man den letzten, wie den ersten, auf den 30. Tag; ausgenommen, wenn der 29. Tag der Mondphasen auf den letzten December fällt, in welchem Falle man den Neumond auf diesen Tag setzt. Zu beweisen a) daß man das Alter des Mondes an jedem ersten Monatstag findet, wenn man zum Alter, das der Mond am 1. Januar hatte, oder zu den Epacten, am 1. Febr. 1, am 1. März 0, am 1. April 1, am 1. Mai 2, am 1. Juni 3, am 1. Juli 4, am 1. August 6, am 1. Sept. 7, am 1. Oct. 8, am 1. Nov. 9, am 1. Dec. 10 addirt und davon, wenn es möglich ist, entweder 29 oder 30 abzieht; b) daß man die Epacten eines Jahres findet, wenn man zu den Epacten des vorigen Jahres 11 addirt und von dieser Summe 30 abzieht, wenn sie größer als 30 ist, oder davon 29 abzieht, wenn sie genau 29 beträgt; c) daß nach dieser Berechnungsweise auf 19 Jahre 235 Erneuerungen der Mondphasen kommen.

73. Die Epacten des J. 1865 sind 3 und der Sonntagsbuchstabe ist **A**; a) welches ist das Alter des Mondes am 1. März, am 24. Juni, am 1ten Sonntag im October? b) wann beträgt zum ersten Male nach dem 20. März das Alter des Mondes 14 Tage? c) auf welches Datum fällt der auf diesen Tag folgende Sonntag, Ostern?

74. Welches waren und sind die Epacten und Sonntagsbuchstaben der Jahre 1864, 1866, 1867; wann beträgt in diesen Jahren zum ersten Male nach dem 20. März das Alter des Mondes 14 Tage, und auf welches Datum fällt Ostern?

Inhalt.